

SEMI-EMPIRISCHE SCHALENKORREKTUR
ZUR DEFORMATIONSENERGIE
BEI DER KERNSPALTUNG

Rainer Schultheis

1972



VERGÄNGELICHKEIT UND DAS UNVERGÄNGLICHE
AN DER GRENZE DER THEOLOGIE UND PHILOSOPHIE

Vergängnis-Disserertation zur Erlangung der Doktorwürde der
Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Reiner Schellhals
aus Frankfurt a.M.

München 1972

SEMI-EMPIRISCHE SCHALENKORREKTUR ZUR DEFORMATIONSENERGIE BEI DER
KERNSPALTUNG

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der
Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Rainer Schultheis
aus Frankfurt a.M.

München 1972



Berichterstatter: Professor Dr. G. Süßmann
Wiss. Rat u. Professor Dr. H. J. Specht

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1972

Inhalt

	<u>Zusammenfassung</u>	5
I	<u>Einleitung</u>	7
II	<u>Zwei-Kugel-Modell</u>	14
II.1	Semi-empirische Massenformeln und Schaleneffekte im Tal der stabilen Kerne	14
II.2	Schalenkorrektur und effektive Oberflächenspannung im Zwei-Kugel-Modell	20
II.3	Berechnung der Schalenkorrektur für ein modifiziertes Fermi-Gas	25
II.4	Doppelte Spaltbarriere und Sekundärminimum	33
II.5	Existenz von Gestaltisomeren im Periodensystem	38
II.6	Relative Höhe der zweiten Barriere	41
II.7	Massenasymmetrie	42
II.8	Asymmetrische Deformation im Verlauf der Spaltung	48
III	<u>Realistische Kerngestalten</u>	50
III.1	Parametrisierung der Kerngestalt	50
III.2	Lokale und globale Krümmung	56
III.3	Anpassung des Gewichtsfaktors	58
III.4	Mittelung der Hauptkrümmungen	62
III.5	Schalenkorrektur bei negativer Krümmung	63
IV	<u>Ergebnisse</u>	65
IV.1	Schalenkorrektur für symmetrische Deformationen (α_2, α_4)	65
IV.2	Vergleich mit Schalenkorrekturen nach der Strutinsky-Methode	70

IV.3	Fläche der potentiellen Energie für U^{236} und Pu^{242}	73
IV.4	Deformations-, Tröpfchenmodell- und Schalenenergie auf dem niedrigsten Weg zur Spaltung	78
IV.5	Spaltbarrieren einiger Aktiniden im Vergleich mit Experimenten und mit der Strutinsky-Methode	82
IV.6	Anregungsenergie und Tiefe der Sekundärminima	85
IV.7	Symmetrische Deformation minimaler Energie	90
IV.8	Massenasymmetrie und asymmetrische Deformation auf dem Spaltweg	94
IV.9	Asymmetrie (α_3) in verschiedenen Phasen der Spaltung von U^{236}	95
IV.10	Oktupoldeformation am zweiten Sattelpunkt	99
IV.11	Fragmentpaar minimaler Energie	100
V	<u>Schalenkorrektur und Niveaudichte an der Fermi-Kante</u>	107
	<u>Literatur</u>	109

Zusammenfassung

Für die Theorie der Kernspaltung wird eine Schalenkorrektur zur potentiellen Energie eines Kerns als Funktion seiner Deformationsparameter untersucht. Dieser Term berücksichtigt die Abweichung der Energie einer Niveaudichte mit der Schalenstruktur des Einteilchenpotentials von der klassischen Tröpfchenmodell-Energie nach Bohr und Wheeler.

Bisher konnte diese Schalenkorrektur nur nach der Strutinsky-Methode berechnet werden, in der durch Faltung der Einteilchen-Niveaudichte mit Gauß-Funktionen eine mittlere Niveaudichte bestimmt und deren Energie durch die Tröpfchenmodell-Energie ersetzt wird. Im Gegensatz dazu ist die Schalenkorrektur der vorliegenden Arbeit nicht aus einem bestimmten Niveauschema abgeleitet. Deshalb bietet sie zwei Vorteile: Sie ist für beliebige Deformationen leicht zu berechnen, und Extrapolationen zu hypothetischen Kernen sind zuverlässiger, da sie unabhängig von den Unsicherheiten des Einteilchenpotentials und seiner Parameter sind.

Diese Schalenkorrektur wird in einer speziellen Parametrisierung der Kerngestalt für ein freies Fermi-Gas berechnet, das durch eine erniedrigte Niveaudichte bei magischen Zahlen modifiziert ist. Schon für diese vereinfachte Kerngestalt erzeugt die Schalenkorrektur ein Sekundärminimum in der potentiellen Energie und begünstigt energetisch die asymmetrische Spaltung von U^{236} . Es wird daraus eine notwendige Bedingung für die Existenz von Gestaltisomeren im Tal der stabilen Kerne abgeleitet und Beziehungen für die relative Höhe der ersten und zweiten Spaltbarriere und für asymmetrische Deformationen am zweiten Sattelpunkt angegeben.

Für allgemeine Kerndeformationen wird die aus dem Fermi-Gas berechnete Schalenkorrektur auf die semi-empirische Schalenfunktion sphärischer Kerne von Myers und Swiatecki

zurückgeführt. Durch ein zweifaches Integral mit drei angepaßten Parametern kann sie für beliebige Deformationen explizit angegeben werden.

In einer geeigneten Parametrisierung wird die potentielle Energie von Th^{232} , U^{236} , Pu^{242} , Cm^{244} , Cf^{250} und Fm^{254} als Funktion von Länge und Einschnürung des Kerns berechnet. Die resultierenden Anregungsenergien der Sekundärminima, Barrierenhöhen und Deformationen sind mit experimentellen Daten und Ergebnissen nach der Strutinsky-Methode quantitativ vergleichbar. Für U^{236} wird der Einfluß eines asymmetrischen Freiheitsgrades auf die Deformation des Kerns während der Spaltung und auf die Energie der invarianten Punkte der Potentialfläche untersucht und das Fragmentpaar minimaler Energie bestimmt. Diese energetisch günstigsten Fragmente liegen in der Nähe der experimentell wahrscheinlichsten.

Trotz unterschiedlicher Annahmen sind die Ergebnisse der Schalenkorrektur dieser Arbeit und die nach der üblichen Strutinsky-Methode ähnlich. Daraus werden Folgerungen über die Bedeutung der Niveaudichte in der Nähe der Fermi-Energie für Schaleneffekte in deformierten Kernen gezogen.

I Einleitung

Die Spaltung schwerer Atomkerne ist eines der ältesten Probleme in der Kernphysik, aber bis heute, nach über dreißig Jahren, ist man von einer befriedigenden theoretischen Lösung noch weit entfernt.

Schon im Jahr nach der Entdeckung des Effekts durch Hahn und Straßmann¹⁾ gelang Bohr und Wheeler²⁾ 1939 eine theoretische Beschreibung des Prozesses, indem sie die Massenformel v. Weizsäckers³⁾ für deformierte Kerne erweiterten. Diese Theorie ist bis heute für viele technische Anwendungen ausreichend und in allen theoretischen Berechnungen der Energie des Prozesses unentbehrlich, macht aber Voraussagen, die experimentellen Ergebnissen zum Teil widersprechen.

Die am häufigsten beobachtete Form der niederenergetischen Kernspaltung endet in zwei Fragmenten mit Massen der gleichen Größenordnung. Die Spaltung in drei Fragmente, zwei schwere und ein leichtes, ist weit weniger wahrscheinlich^{2,4-8)}. Deshalb soll hier ausschließlich die binäre Spaltung untersucht werden. Diese ist vor allem interessant für die Struktur der Spaltbarrieren, die für Gestaltisomerie und die Lebensdauer hypothetischer überschwerer Kerne entscheidend ist, und wegen der Massenasymmetrie bei der Spaltung schwerer Kerne, die seit Jahrzehnten nicht befriedigend erklärt werden kann.

Dieses 250-Teilchen-Problem ist bis heute (dynamisch) ungelöst, man versucht deshalb zunächst, die potentielle Energie allein zu berechnen, in der Hoffnung, daraus schon zuverlässige Ergebnisse für niedrige Anregungsenergien zu finden.

Im Gegensatz zu den technischen Anwendungen der Kernspaltung sind bis in die sechziger Jahre nur geringe theoretische Fortschritte erzielt worden. Verbessert wurden vor allem die Massenformeln^{2,5,9-24)} durch feinere Korrekturen, bessere Anpassungen der Parameter und zum Teil aufwendige Parametri-

sierungen der Kerngestalt, was zu ausgedehnten numerischen Rechnungen führte, als programmgesteuerte Rechenmaschinen aufkamen.

Die Methoden blieben im wesentlichen gleich: Eine Tröpfchenmodell-Massenformel wird so verallgemeinert, daß sie sich auf Kerne beliebiger Gestalt anwenden läßt, und dann die Änderung der potentiellen Energie des Kerns mit zunehmender Deformation als Funktion eines Satzes von Gestaltparametern beschrieben. Dabei zeigt sich, daß die ursprünglich zur Berechnung der Bindungsenergien konzipierten Vorstellungen vom Atomkern als einem geladenen Tropfen (Gamov²⁵⁻²⁷) (1929-30), v. Weizsäcker³) (1935) und Bethe und Bacher¹⁰) (1936)) mit definierter Oberfläche (oder Oberflächenschicht) und konstanter Dichte im Innern auch auf deformierte Kerne anwendbar sind. Sie gibt die potentielle Energie nicht nur als Funktion von Kernmasse und -ladung bei fester (sphärischer) Gestalt erstaunlich gut wieder, sondern auch die Deformationsenergie bei so extremen Deformationen, wie sie bei der Kernspaltung auftreten.

Wesentliche experimentelle Effekte blieben aber ungeklärt, vor allem die asymmetrische Spaltung schwerer Kerne in ungleiche Fragmente, Diskrepanzen in der kinetischen Energie und der Deformationsenergie der Fragmente, die Zahl der emittierten Neutronen, das Verhalten der Spaltbarrieren bei zunehmender Kernmasse und alles, was mit der erst 1962 von Polikanov, Flerov et al.^{28,29}) entdeckten Spaltisomerie²⁸⁻³⁹) und der entsprechenden intermediären Struktur der Spaltbarrieren zusammenhängt.

Swiatecki²¹) konnte zeigen, daß einige Anomalien der Spaltbarrieren beseitigt werden können, wenn man die Abweichungen der experimentellen Kernmassen von den nach dem Tröpfchenmodell zu erwartenden berücksichtigt. Myers und Swiatecki⁴⁰⁻⁴³) gelang es dann auch, einer Arbeit von Mozer⁴⁹) folgend, eine semi-empirische Schalenkorrektur zum Tröpfchenmodell zu bestimmen, die viele dieser Schaleneffekte im Grundzustand zu berechnen gestattet. In dieser Zeit wurde eine Reihe ähnlicher

Schalenkorrekturen publiziert, die alle nach dem gleichen Schema gebildet waren: Die Schalenenergie wurde bestimmt durch eine auf Modellvorstellungen beruhende Funktion der Kernmasse, Ladung und Deformation mit einer Anzahl von Parametern, die an die experimentellen Bindungsenergien und Quadrupolmomente angepaßt wurden. Zu erwähnen sind hier die Arbeiten von Seeger^{44,56-60}) und Perisho⁵⁶), Cameron und Elkin⁴⁵), Geilikman^{46,47}) und Khlebnikov⁴⁷), Kummel et al.⁴⁸), Strutinsky⁵⁰), Zeldes⁵¹), Vandenbosch⁵²), Fong⁵³), Armbruster⁵⁴) und Schmitt⁵⁵).

Der Schalenterm von Myers und Swiatecki ist deshalb von besonderer Bedeutung, weil er, auf fiktive Kerne jenseits der heute bekannten Massenzahlen angewandt, vermuten ließ, daß es ein isoliertes Gebiet von relativ stabilen Kernen mit einer Massenzahl von etwa 300 geben könnte^{40,41}). Das war anzunehmen, weil der neue Schalenterm ein deutliches Minimum der potentiellen Energie erzeugt, wo nach dem Tröpfchenmodell kein Minimum zu erwarten ist - oder nur ein sehr schwaches - so daß ein gebundener Zustand ausgeschlossen werden kann. Diese vermutete Existenz überschwerer Kerne zeigt einen der großen Vorteile dieser semi-empirischen Schalenkorrekturen: Sie gelten mit festen Parameterwerten in großen Bereichen des Periodensystems und sind deshalb leicht auf hypothetische Kerne zu extrapolieren.

Leider haben sich semi-empirische Schalenkorrekturen bisher bei starken Deformationen nicht in gleicher Weise bewährt. Die meisten konnten nur für Rechnungen in der Nähe des Grundzustandes angewandt werden, in dem der Kern noch schwach deformiert ist ($\beta \approx \epsilon \approx \delta \approx 0.2 - 0.3$). Darüber hinaus wurden einige zur Beschreibung der Spaltpunktkonfiguration benutzt, wie die von Fong⁵³) im statistischen Modell der Kernspaltung und die von Vandenbosch⁵²), Armbruster⁵⁴) und

Schmitt⁵⁵⁾ zur adiabatischen Beschreibung, in der die Fragmente als zwei sich berührende Ellipsoide angenommen werden. Jedoch blieben alle Phänomene ungeklärt, die während des Verlaufs der Kernspaltung selbst - zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt - auftreten wie die Gestaltisomere und die damit verbundenen doppelten Spaltbarrieren. Sie können bis jetzt nur nach der numerisch sehr viel aufwendigeren Strutinsky-Methode⁶¹⁻⁶⁶⁾ berechnet werden.

Dazu sind zunächst die Einteilchen-Niveaus als Funktion aller Gestaltparameter des vorgegebenen Einteilchen-Potentials zu berechnen. Deren Niveaudichte wird dann mit einer geeigneten Gauß-Funktion gefaltet und die entsprechende Energie durch die Tröpfchenmodell-Deformationsenergie ersetzt (vgl. II.3).

Für überschwere Kerne ist spontane Spaltung neben α - und β -Zerfall die wichtigste Zerfallsart. Wichtig vor allem deshalb, weil die Spaltwahrscheinlichkeit nur mit großer Ungenauigkeit geschätzt werden kann. Denn dafür muß man die Tunnelwahrscheinlichkeit durch die Spaltbarriere berechnen, die durch die gesamte gestaltabhängige Deformationsenergie vom (wahrscheinlich sphärischen) Grundzustand bis zu einem weitgehend eingeschnürten Kern bestimmt ist. Deshalb schwanken Schätzungen der Lebensdauer für überschwere Elemente so sehr, daß zur Zeit völlig offen ist, ob man sie je in der Natur finden oder künstlich herstellen kann.

Hier zeigt sich ein großer Nachteil der Strutinsky-Methode: In sie gehen alle Fehler des Einteilchenpotentials ein, und es ist schwierig, die möglichen Einteilchenparameter überschwerer Kerne aus bekannten zu extrapolieren, weil sie stark von Kern zu Kern schwanken.

Deshalb wird in dieser Arbeit eine semi-empirische Schalenkorrektur für die Kernspaltung untersucht, die schon in Ref.^{166, 170, 176)} für den Grundzustand angewandt worden ist. Diese Schalenkorrektur hat, da sie unabhängig von bestimmten Einteilchen-Potentialen ist, gegenüber der Strutinsky-Methode zwei Vorteile:

(1) Man kann die Schalenenergie eines beliebig deformierten Kerns aus einem expliziten Ausdruck berechnen. Dafür ist die Computer-Zeit pro Deformation vergleichsweise sehr gering. Außerdem wächst sie nur wenig bei zunehmender Deformation. Deshalb kann man - im Gegensatz zur Strutinsky-Methode - leicht die Schalenenergie bei beliebiger Kerngestalt berechnen.

(2) In die Schalenenergie gehen die Unsicherheiten des jeweiligen Einteilchenpotentials und seiner Parameter nicht ein. Sie enthält drei angepasste Parameter, die für das ganze Periodensystem einen festen Wert haben. Extrapolationen zu hypothetischen Kernen mit diesem festen Parametersatz sollten deshalb zuverlässiger sein als nach der Strutinsky-Methode mit geschätzten Einteilchen-Parametern. Damit wäre eine Hauptunsicherheit bei der Berechnung der Stabilität überschwerer Kerne zu verringern, denn die Zerfallswahrscheinlichkeiten für den konkurrierenden α - und β -Zerfall sind aus experimentellen Massen und Q-Werten relativ sicher abzuschätzen (vgl. Nilsson et al.⁶⁷⁾).

Als Test für die Anwendbarkeit dieser dreiparametrischen Schalenkorrektur wurden in einer früheren Arbeit¹⁷⁶⁾ Massen und innere Quadrupolmomente Q_0 von etwa 50 gg-Kernen mit Massenzahlen größer als $A = 100$ aus dem Minimum der Deformationsenergie berechnet und mit experimentellen Werten verglichen. Die Ergebnisse sind in Ref.¹⁶⁶⁾ veröffentlicht. Diese Rechnungen beschränkten sich auf den Grundzustand, also auf relativ schwache ($Q_0 \approx 10$ barn) Kerndeformationen, die symmetrisch zum Kernmittelpunkt und kaum eingeschnürt sind.

Für die vorliegende Arbeit wird die Parametrisierung der Kerngestalt in eine für die Spaltung zweckmäßigere Form gebracht, die Vergleiche mit anderen Parametrisierungen trotz der (üblichen) nicht-invarianten Begriffe erleichtert (vgl. III.1 und Ref.¹⁶⁵⁾). Das Computer-Programm zu ¹⁶⁶⁾ wird für

negative lokale Krümmung der Kernoberfläche (mit einer Polstelle des Krümmungsradius (III.4)) und für asymmetrische Deformationen erweitert. Außerdem wird die globale Krümmung nicht mehr wie in ¹⁶⁶⁾ auf den ganzen Kern, sondern auf die beiden sich ausbildenden Cluster bezogen (III.5). So kann die Deformationsenergie im gesamten für die Kernspaltung interessanten Bereich zwischen sphärischem Kern ($Q_0 = 0$) und sich berührenden Fragmenten ($Q_0 = 300$ barn) als Funktion der wichtigsten Freiheitsgrade, Länge α_2 , Einschnürung α_4 und Massenasymmetrie α_3 , untersucht werden. Damit wird die intermediäre Struktur der Spaltbarriere berechenbar und die Ergebnisse der semi-empirischen Schalenkorrektur mit denen anderer Autoren ^{64,67,111,126,129,132,177,183)} vergleichbar.

Erste Ergebnisse bei symmetrischer Kerndeformation sind für Pu^{242} in Ref. ¹⁷⁵⁾ dargestellt. In Teil IV der vorliegenden Arbeit werden Schalenkorrekturen und Deformationsenergien von Th^{232} , U^{236} , Pu^{242} , Cm^{244} , Cf^{250} und Fm^{254} angegeben und die resultierenden Energien und Deformationen an den stationären (invarianten) Punkten der Energiefläche sowie die energetisch begünstigte Massenaufteilung mit experimentellen Daten und denen der Strutinsky-Methode verglichen. Weitere Rechnungen unter Berücksichtigung nicht-axialer Deformationen (ohne Einschnürung und Massenasymmetrie) deuten auf unerwartet niedrige Anregungsenergien von γ -Vibrationen im zweiten Minimum der Aktiniden und auf einen Übergang von Oblaten- (Mehrfach-) zu Prolaten- (Zweifach-) Spaltung bei überschweren Kernen hin. Einige dieser Resultate sind in Ref. ^{171,172)} angegeben.

Im ersten Teil der Arbeit (II) wird die Schalenkorrektur an einem stark vereinfachten Modell untersucht. In diesem wird die Kerngestalt während der Spaltung durch zwei sich mehr oder weniger überlappende Kugeln beschrieben. Das vereinfacht die analytische Form der Schalenkorrektur so weit, daß numerische Rechnungen fast ganz entbehrlich sind. Dennoch kann in diesem einfachen Modell der wesentliche Einfluß von Schaleneffekten

auf die Spaltung schon gut wiedergegeben werden.

In II.3 wird die Schalenenergie für ein durch eine schematische Schalenstruktur modifiziertes Fermi-Gas berechnet. Es zeigt sich, daß diese Schalenkorrektur bei derartig begrenzten Deformationen dem schon in ¹⁶⁶⁾ benutzten, von der Krümmung der Kernoberfläche abhängigen Ansatz nahekommt. Dieser Schalenterm II.3 wird mit Annahmen begründet, die von denen der Strutinsky-Vorschrift sehr verschieden sind. Trotzdem sind die Ergebnisse beider Verfahren überraschend ähnlich. Deshalb wird im letzten Abschnitt (V) das Verhalten der Niveaudichte mit zunehmender Deformation in beiden Schalenkorrekturen untersucht. Es zeigt sich, daß in beiden Fällen der Wechsel von hoher und niedriger Niveaudichte in der Nähe der Fermi-Energie für das Auftreten von Sekundärschalen entscheidend ist.

II Zwei-Kugel-Modell

Eine der Voraussetzungen der Schalenkorrektur ist die Ausbildung der Fragment-Schalen schon in einem frühen Stadium der Spaltung. Das läßt sich besonders leicht an einem vereinfachten Modell beschreiben, in dem der Kern während des Prozesses aus zwei sphärischen Clustern besteht.

Nach Fong⁵³⁾ kann man die Schalenenergie durch Korrekturen zur Oberflächenspannung der Tröpfchenmodell-Deformationsenergie berücksichtigen. In dem Zwei-Kugel-Modell führt das zu zwei verschiedenen Parametern für die Oberflächenspannung der beiden Cluster. In II.2 wird so phänomenologisch eine Schalenkorrektur bestimmt.

In II.3 wird eine Schalenkorrektur des spaltenden Kerns aus einer schematischen Schalenstruktur von Fermi-Gas-Niveaus berechnet und gezeigt, daß diese Schalenkorrektur mit der von II.2 übereinstimmt. Dabei ist die Funktion $S(N,Z)$ wichtig, die von Myers und Swiatecki⁴⁰⁻⁴³⁾ für Schaleneffekte im Grundzustand angegeben wurde (II.1).

II.1 Semi-empirische Massenformeln und Schaleneffekte im "Tal der stabilen Kerne"

Durch die semi-empirische Massenformel v. Weizsäckers³⁾ nach dem Tröpfchenmodell und alle späteren verbesserten Versionen^{2,5,9-24)} konnten Kernmassen bis auf einige MeV Abweichung von gemessenen Daten bestimmt werden.

Die Tröpfchenmodell-Masse (oder Energie) gegen die Neutronenzahl N und die Protonenzahl Z aufgetragen, bestimmt das "Tal der stabilen Kerne" mit etwa parabolischem Querschnitt. Green⁶⁸⁾ hat für die Koordinaten des Tals in der N - Z -Ebene

eine empirische Relation angeben

$$N - Z = \frac{0.4 A^2}{A + 200} \quad (\text{II.1.1})$$

Längs dieser Kurve sind in Abb. 1 die Abweichungen der experimentellen und theoretischen Werte für eine der zur Zeit am besten angepassten Tröpfchenmodell-Massenformeln dargestellt. Die Fehler sind hauptsächlich durch Schaleneffekte bestimmt und konnten erst dann erheblich verkleinert werden, als dafür Korrekturen berücksichtigt wurden (z.B. Mozer⁴⁹); Seeger⁴⁴); Kümmel, Mattauch, Thiele und Wapstra⁴⁸); Cameron und Elkin⁴⁵); Zeldes⁵¹).

Besonders Myers und Swiatecki⁴⁰⁻⁴³) konnten die Fehler der Massen erheblich verkleinern. Sie addieren zu einer vier-parametrischen Tröpfchenmodell-Massenformel eine drei-parametrische Schalenkorrektur. Einer der drei Parameter ist in einem Dämpfungsfaktor enthalten, der die Schalenenergie mit zunehmender Deformation abklingen läßt. Myers und Swiatecki^{40,41}) empfanden diesen Dämpfungsfaktor für die Gestaltabhängigkeit der Schaleneffekte selbst als unbefriedigend. Inzwischen hat es sich herausgestellt, daß er - wie auch die verbesserte Version^{42,43}) - Schaleneffekte in deformierten Kernen falsch beschreibt.

Die Schalenkorrektur gibt dagegen das Verhalten von Schalenenergien in (fast) sphärischen Kernen recht gut wieder, wie man nach den damit berechneten Massen vermuten kann. Diese Schalenfunktion $S(N, Z)$ wurde aus einem durch eine Schalenstruktur modifizierten Fermi-Gas-Modell bestimmt. In diesem Gas sind die Einteilchen-Niveaus so zu einzelnen Gruppen gebündelt, daß Lücken in der Nähe magischer Zahlen entstehen. Die entsprechende Korrektur ist eine Funktion der Neutronen- und Protonenzahl, N und Z , des Kerns und enthält zwei Parameter C und c :

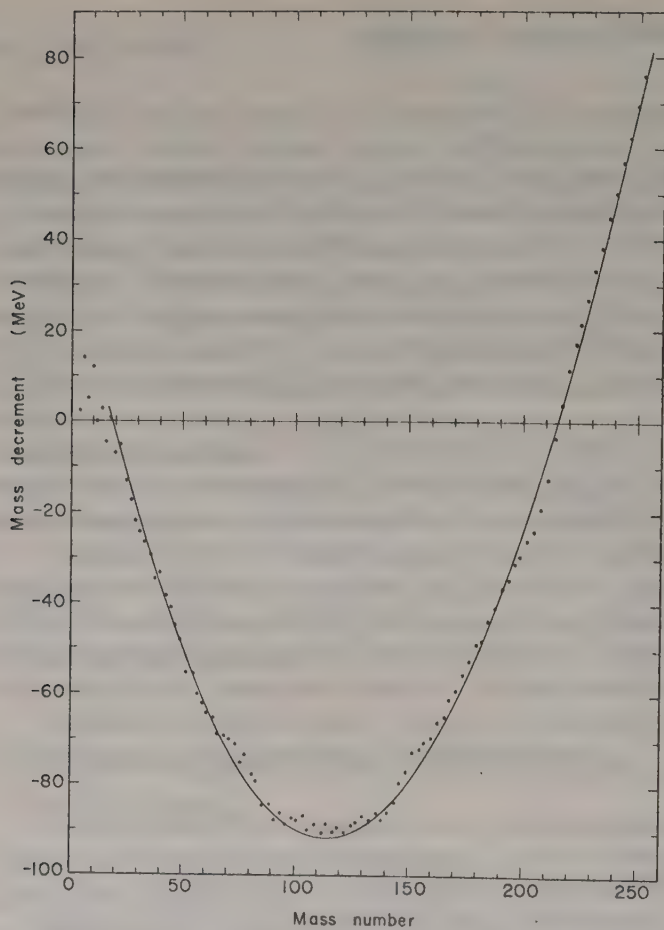


Abb.1. Experimentelle Massen-Dekremente (Punkte) im Vergleich zu Tröpfchenmodell-Werten (ausgezogen) nach Myers und Swiatecki⁴⁰⁾.

$$S(N,Z) = C \left[\frac{F(N)+F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - cA^{1/3} \right] \quad (\text{II.1.2})$$

$$F(m) = - \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}} (m - M_{i-1}) - \frac{3}{5} (m^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}) \quad (\text{II.1.3})$$

wobei M_{i-1} und M_i die zu m benachbarten magischen Zahlen sind ($M_{i-1} \leq m \leq M_i$). Die Funktion $S(N,Z)$ oszilliert in N und Z , sie ist positiv in der Mitte einer Schale und negativ an doppelt magischen Punkten der N - Z -Ebene. Die Parameter sind an eine große Zahl von experimentellen Massen und Quadrupolmomenten angepaßt. Sie bestimmen Amplitude und Mittelwert der Funktion. Ihre Werte (mit der zweiten Version des Dämpfungsfaktors^{42,43}) sind $C=5.8$ MeV und $c=0.325$.

Diese Schalenkorrektur von Myers und Swiatecki ist nicht die einzige, die für unsere Zwecke brauchbar wäre, sie hat aber einige Vorteile gegenüber anderen: Sie hat nur wenige Parameter (im Gegensatz z.B. zu der von Zeldes⁵¹), sie beschreibt sehr übersichtlich (s. Abb. 2) den Verlauf von Schaleneffekten zwischen magischen Werten, und sie ist, da sie analytisch gegeben ist, mit dem Computer schnell zu berechnen. Deshalb wird im folgenden immer diese Funktion für die Schalenenergie sphärischer Kerne benutzt.

Einige ihrer Eigenschaften sind für die spätere Diskussion wichtig: Wenn man sie als Korrektur zur potentiellen Energie nach dem Tröpfchenmodell ansieht, erzeugt diese Funktion besonders stabile Kerne in der Nähe magischer Zahlen und weniger stabile in der Mitte einer Schale, wenn man Grundzustandsdeformationen zunächst vernachlässigt. Das Höhenlinienbild (Abb. 3) zeigt dieses Verhalten in der N - Z -Ebene für sphärische Kerne. Das nach dem Tröpfchenmodell glatte Tal der stabilen Kerne erhält mit dieser Korrektur eine hügelige

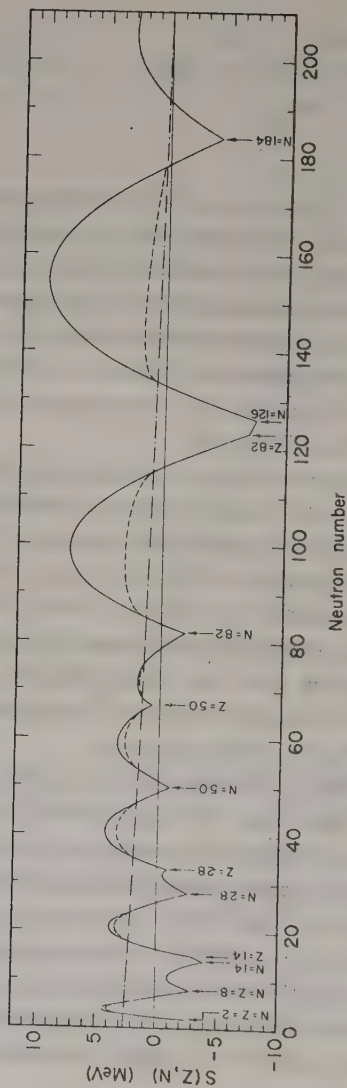


Abb.2. Schalenfunktion $S(N, Z)$ längs der Näherung von Green⁶⁸⁾ für das Tal der stabilen Kerne (ausgezogen). Gestrichelte Linien entsprechen der falschen Dämpfung von Schalen-
effekten bei Deformation. (Entnommen Myers und Swiatecki⁴⁰⁾)

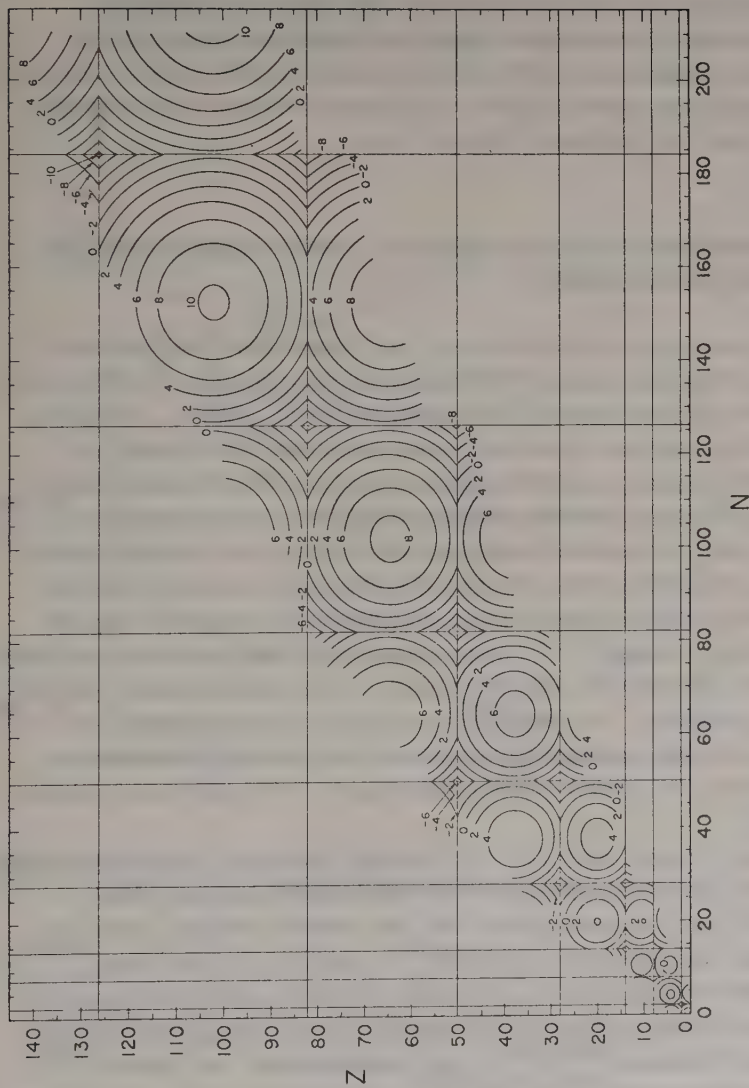


Abb.3. Schichtlinienbild der Schalenfunktion $S(N, Z)$ als Funktion der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z nach Myers und Swiatecki⁴⁰⁾.

Struktur, in der bei magischen N- und Z-Werten tiefe V-förmige Gräben eingeprägt sind. Besonders für doppelt magische Nukleonenzahlen entstehen durch die Überschneidung dieser Gräben eng begrenzte Vertiefungen. Diese Struktur des Tals der stabilen Kerne wird in II.4 - II.8 entscheidend für mehrere Effekte bei deformierten Kernen sein.

II.2 Schalenkorrektur und effektive Oberflächenspannung im Zwei-Kugel-Modell

In dem oben beschriebenen Zwei-Kugel-Modell eines spaltenden Kerns kann die Tröpfchenmodell-Energie als Funktion von zwei Gestalt-Parametern, z.B. den Radien R_1 und R_2 (Abb. 4), beschrieben werden, wenn man eine homogene Verteilung von Masse und Ladung im ganzen Kern annimmt. Für homogene Dichte spricht die sehr geringe Kompressibilität der Kernmaterie⁶⁹⁻⁷⁴⁾. Für konstante Ladungsdichte spricht die in zahlreichen Experimenten gesicherte Beobachtung, daß bei der Kernspaltung die Fragmente bis auf etwa 1% die gleiche Ladungsdichte wie der Compoundkern haben⁷⁵⁻⁸²⁾. Der Abfall der Ladungsdichte am Kernrand kann durch eine Korrektur in der Coulomb-Energie berücksichtigt werden, die praktisch deformationsunabhängig ist^{41,83)}. Da während der Kernspaltung gerade die Deformationsenergie interessant ist, kann dieser konstante Term unberücksichtigt bleiben.

Das Gleiche gilt für die anderen deformationsunabhängigen Terme üblicher semi-empirischer Massenformeln, also für Volumen- und Paarterm sowie für den Symmetrieterm, wenn er nicht wie bei Cameron und Elkin⁴⁵⁾, Myers und Swiatecki⁴⁰⁻⁴³⁾ einen Oberflächen-Anteil enthält. Außerdem soll hier von der Deformationsabhängigkeit kleinerer Korrekturen, wie dem Einfluß der Krümmung^{58,85-95)}, dem Dichteabfall im Innern⁹¹⁻⁹³⁾, der Neutronenhaut^{91-93,95,97-99)}, der Granulation der Ladung

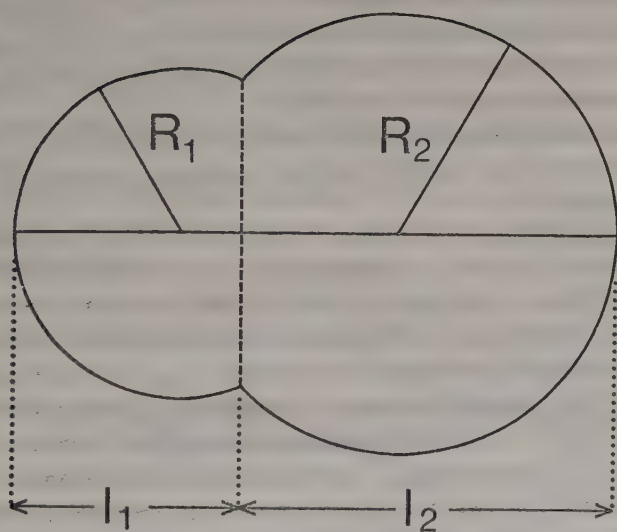


Abb. 4. Zwei-Kugel-Modell der Kernspaltung.

und den Korrelationstermen (v.Weizsäcker³⁾ 1935 und später 57,58,10,84). Dann bleibt als Deformationsenergie nach dem Tröpfchenmodell die Oberflächen- und Coulomb-Energie:

$$E = E_S + E_C = \sigma |S| + \frac{1}{2} \int \frac{\rho \rho' d\tau d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{II.2.1})$$

Hier bedeutet σ die Oberflächenspannung, $|S|$ die Kernoberfläche und ρ die Ladungsdichte.

Wichtig ist für das Folgende, daß die Oberflächenspannung σ der einzige frei angepaßte Parameter der Deformationsenergie ist. Im Gegensatz dazu ist der Wert des Ladungsradius R_c in der Coulombenergie durch Elektronen der Coulomb-Energie durch Elektronenstreuexperimente^{96,100-102)} gut bekannt und kann deshalb in der Anpassung nicht mehr frei variiert werden.

Schaleneffekte verursachen Fluktuationen der Kernmassen um den glatten Verlauf der Massenkurve nach dem Tröpfchenmodell. Um Schaleneffekte phänomenologisch in der Deformationsenergie zu berücksichtigen, soll σ , der einzige angepaßte Parameter, durch eine noch zu bestimmende Funktion σ_{eff} ersetzt werden, die um den fest angepaßten Wert σ schwankt. Dieses Verfahren wurde von Fong⁵³⁾ 1962 vorgeschlagen und später von Vandenbosch⁵²⁾, Armbruster⁵⁴⁾ und Schmitt⁵⁵⁾ angewandt.

Hier wird für das Zwei-Kugel-Modell die etwas schwächere Annahme gemacht, daß die Oberflächenspannung zwar in jedem der beiden Cluster konstant ist, aber nicht unbedingt über die ganze Kernoberfläche. Sie kann zwei verschiedene Werte annehmen, wenn die beiden Cluster verschiedene Radien haben.

In dieser Form ist die Schalenkorrektur Rechnungen von Schmitt⁵⁵⁾ für Fragmente am Spaltpunkt ähnlich. Er ersetzt die Oberflächenspannung σ durch eine "effective surface tension constant" σ_{eff} , die von den Protonen- und Neutronenzahlen der sich berührenden Fragmente abhängt. Damit konnte er die experimentelle mittlere kinetische Energie der Fragmente gut,

ihre Anregungsenergie weniger gut approximieren.

Die Werte der effektiven Oberflächenspannung σ_{eff} wurden in ⁵⁵⁾ mit Hilfe von experimentellen Daten durch eine "boots-trap"-Rechnung bestimmt: Ausgehend von der symmetrischen Spaltung $U^{236}(n_{\text{th}}, f)$ wurden einem Fragmentpaar σ_{eff} -Werte zugeordnet und diese für das gleiche Fragment bei der asymmetrischen Spaltung anderer Compoundkerne (Pu^{240} , Pu^{242} , Cf^{252}) beibehalten. Daraus läßt sich dann der σ_{eff} -Wert des entsprechenden anderen Fragments bestimmen. Auf diese Weise kann man allen Fragmenten effektive Oberflächenspannungen zuordnen. Die Methode ist bei Schmitt allerdings auf ellipsoidförmige, sich berührende Fragmente beschränkt, und sie war nicht dazu gedacht, für andere als die Spaltunkt-Konfiguration angewandt zu werden.

Hier soll diese Beschreibung für alle Stadien der Spaltung gelten. Die Deformationsenergie während der Spaltung hat dann die folgende Form:

$$E = \sigma_{\text{eff}}(N_1, Z_1) |S_1| + \sigma_{\text{eff}}(N_2, Z_2) |S_2| + \frac{1}{2} \int \frac{\varrho \varrho' d\tau d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{II.2.2})$$

Dabei ist $\sigma_{\text{eff}}(N_1, Z_1)$ die effektive Oberflächenspannung des einen Clusters, $|S_1|$ seine Oberfläche.

Die in II.1 beschriebene, an Massen und Quadrupolmomente angepaßte Funktion $S(N, Z)$ von Myers und Swiatecki⁴⁰⁻⁴³⁾ für die Schalenenergie sphärischer Kerne bietet eine Möglichkeit, σ_{eff} zu bestimmen. Das gleiche würde jede andere Schalenfunktion sphärischer Kerne mehr oder weniger gut leisten. Die Funktion $S(N, Z)$ wird hier bevorzugt, weil sie nur wenige (zwei) Parameter hat und weil sie schnell zu berechnen ist. Besonders der letzte Gesichtspunkt ist für die numerischen Rechnungen wichtig, weil bei realistischen Deformationen die Schalenenergie durch numerische Integration über diese sphärische

Korrektur berechnet werden muß.

Wenn man annimmt, daß die Funktion $S(N,Z)$ sphärischer Kerne richtig beschreibt, dann ist der Schalenenergie-Anteil σ_{SH} der effektiven Oberflächenspannung σ_{eff} eines sphärischen Kerns mit der Oberfläche $4\pi R_C^2$

$$\sigma_{SH}(N,Z) = \frac{S(N,Z)}{4\pi R_C^2} \quad (II.2.3)$$

und $\sigma_{eff} = \sigma_{LDM} + \sigma_{SH}$ die Summe aus Schalen und Tröpfchenmodell-Anteil (LDM = "liquid-drop model").

Hier ist der Einfachheit halber die Annahme konstanter Protonen- und Neutronendichte in einem Kern mit scharfem Rand gemacht worden. Der Dichteabfall im Kerninnern^{91-93,96)} und die Neutronenhaut^{91-93,97-99)} werden ignoriert. Andernfalls wäre ein mittlerer Radius statt des Ladungsradius $R_C = r_C A^{1/3}$ einzusetzen, für den man etwa den Wert der Elektronenstreuexperimente annehmen kann. Tatsächlich wird hier mit dem etwas größeren Wert $r_C = 1.2$ fm gerechnet, weil dieser bei der Anpassung der Parameter der Funktion $S(N,Z)$ benutzt worden ist.

In dem Zwei-Kugel-Modell der Kernspaltung wird die Oberflächenspannung σ und damit die Schalenenergie analog zu den Formeln (II.2.2) und (II.2.3) behandelt. Danach hat die Schalenkorrektur δE die Form

$$\delta E = \sigma_{SH}(N_1, Z_1) |S_1| + \sigma_{SH}(N_2, Z_2) |S_2| \quad (II.2.4)$$

Nimmt man an, die effektive Oberflächenspannung eines sphärischen Kerns ändere sich höchstens an der Schnittfläche, wenn man ein Stück des Kerns abtrennt, so hat jeder Cluster den gleichen σ_{eff} -Wert wie ein sphärischer Kern mit gleichem Radius (vgl. II.3). Damit bekommt die Schalenenergie des Kerns den Wert:

$$\delta E = S(N_1, Z_1) 2\pi R_1 l_1 / 4\pi R_1^2 + S(N_2, Z_2) 2\pi R_2 l_2 / 4\pi R_2^2 \quad (\text{II.2.5})$$

In dieser Formel sind $A_i = N_i + Z_i$ die Nukleonenzahlen der vollen (sich überlappenden) Kugeln mit den Radien R_i der beiden Cluster. Dieser Ausdruck enthält zwei unabhängige Variable (z.B. R_1, R_2) für einen vorgegebenen Kern (N, Z) . Die Schalenenergie jedes Clusters ist dann einfach die ungedämpfte ^{40,41} Schalenfunktion $S(N, Z)$, multipliziert mit dem Oberflächenverhältnis von Kugelabschnitt und Kugel, und die Schalenenergie ist die Summe aus beiden.

II.3 Berechnung der Schalenkorrektur für ein modifiziertes Fermi-Gas

Bis jetzt ist die Schalenkorrektur phänomenologisch in der Oberflächenspannung berücksichtigt worden, so wie das in einigen Arbeiten ⁵²⁻⁵⁵) für die Schalenkorrektur der Fragmente geschehen ist. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß der Ausdruck (II.2.5) mit dem zusammenfällt, den man mikroskopisch aus einem Fermi-Gas mit einer schematischen Schalenstruktur erhält.

Zur Berechnung der Schalenkorrektur werden in der vorliegenden Arbeit zwei Annahmen gemacht:

- (I) Für die Schalenkorrektur ist die Lage einzelner Einteilchen-Niveaus unwichtig, wichtig ist nur der Wechsel zwischen hoher und niedriger Niveaudichte bei magischen Zahlen.
- (II) Die Schalenstruktur des Compoundkerns ist schon sehr früh (bei minimaler Einschnürung) durch die Schalenstruktur der daraus entstehenden Fragmente bestimmt.

Für die Annahme (I) sprechen die Ergebnisse der meisten

Rechnungen nach der Strutinsky-Methode^{61-67,103-132}). Diese unterscheiden sich im Niveauschema - je nach Art und Parametern des Einteilchenpotentials - erheblich. Dennoch sind die Ergebnisse oft sehr ähnlich (vgl. IV.5). Es scheint für die potentielle Energie nicht notwendig zu sein, ein bestimmtes Niveauschema als Funktion der Gestaltparameter aufzustellen und diese Niveaus dann mit Gauß-Funktionen zu glätten, wenn man mit einem völlig anderen Niveauschema zu ähnlichen potentiellen Energien kommt.

Die Annahme (II) wird gestützt durch Rechnungen von Mosel und Schmitt¹²⁶) für zwei sich mehr oder weniger überlappende Oszillatorpotentiale mit Spin-Bahn- und l^2 -Term, die jedes einzeln Nilsson-Potentialen ähnlich sind. Das entsprechende Niveauschema ist in Abb. 5 wiedergegeben. Danach geht das oszillierende Verhalten der Niveaus ab $s = 1.8$ in das der Fragmente über. Dieser Wechsel ($s = 1.8$) entspricht einer Einschnürung von etwa $\alpha_4 = 25\%$ in der hier verwendeten Parametrisierung (vgl. III.1).

Ähnlich sind die Ergebnisse für zwei sphärische Oszillatorpotentiale (s. Holzer et al.¹³⁷), Fig. 3) und für ein Kastenpotential mit einer Potentialschwelle im Innern (vgl. Dickmann und Dietrich¹³⁸), Fig. 1 und Dietrich¹³³), Fig. 1 und Fig. 2). In diesen Fällen ändert eine Potentialbarriere die unteren Zustände so, daß sie rechts und links der Barriere lokalisiert sind.

Entsprechend der Annahme (II) wird der Kern im Zwei-Kugel-Modell so behandelt, als bestünde er aus zwei voneinander unabhängigen Teilkernen, aus denen sich später die Fragmente bilden. Deshalb wird die Schalenkorrektur hier zuerst für die Fragmente (ohne Wechselwirkung) berechnet und die des Compoundkerns daraus bestimmt. D.h., statt der Spaltung eines Kerns wird die Fusion seiner Fragmente untersucht. Da die Richtung

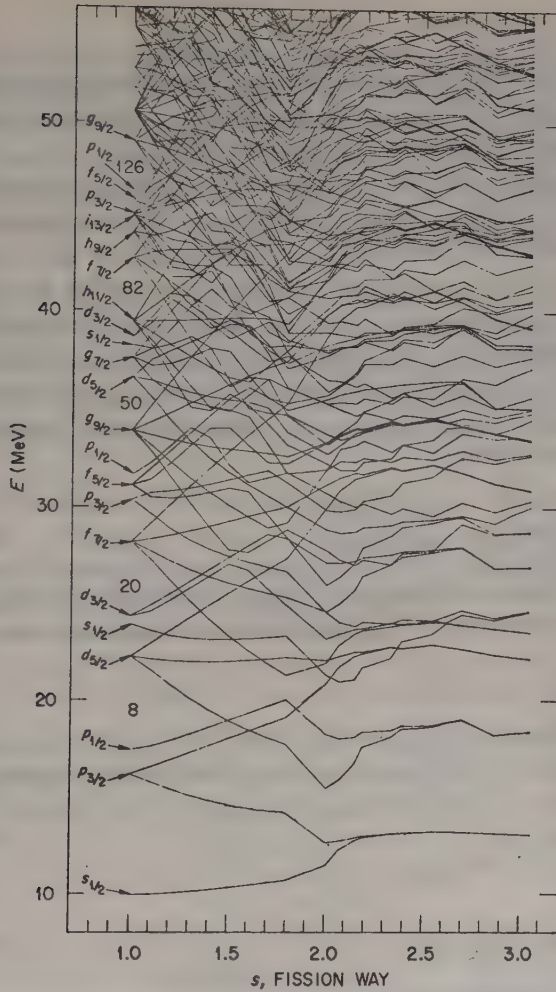


Abb.5. Neutronenzustände für ^{236}U während der Spaltung nach Mosel und Schmitt¹²⁶⁾. Die Einschnürung des Kerns beginnt bei $s=1.7$.

des Prozesses in der hier verwendeten quasistatischen Beschreibung keine Bedeutung hat, gilt die daraus bestimmte Schalenkorrektur dann für beides, Fusion und Spaltung.

Nach Annahme (I) ist das spezielle Einteilchenpotential im Kerninnern zunächst vernachlässigbar: Jedes Fragment wird als freies Fermi-Gas behandelt mit dem Kernrand als Behälter. Um darin eine Schalenstruktur zu erzeugen, werden die Einteilchenniveaus ϵ_n nach einer Idee von Myers und Swiatecki^{40,41)} schematisch gebündelt. Zwischen je zwei magischen Zahlen m_j (nach ^{40,41}): 2, 8, 14, 28, 50, 82, 126, 184) werden alle Niveaus ϵ_n zu einem Niveau $\bar{\epsilon}_j$ gebündelt und dieses in den "Schwerpunkt" der j-ten Schale gelegt:

$$\bar{\epsilon}_j = \sum_{m_{j-1}+1}^{m_j} \frac{\epsilon_n}{m_j - m_{j-1}} \quad (\text{II.3.1})$$

Für die Schalenkorrektur δE des Fragments werden dann die Energiedifferenzen im gebündelten und ungebündelten Fall aufsummiert:

$$\text{Neutronen: } \delta E_N = \sum_{n=1}^N (\bar{\epsilon}_j - \epsilon_n) \quad \text{mit } m_{j-1} < n \leq m_j \quad (\text{II.3.2})$$

$$\text{Protonen: } \delta E_Z = \sum_{n=1}^Z (\bar{\epsilon}_j - \epsilon_n) \quad (\text{II.3.3})$$

$$\delta E = \delta E_N + \delta E_Z \quad (\text{II.3.4})$$

Für die Schalenkorrektur δE wird eine kontinuierliche, mit dem Tröpfchenmodell identifizierte Niveaudichte vorgegeben und daraus nach Annahme (I) eine extreme Schalen-Niveaudichte erzeugt, in der nur die magischen Zahlen vorgegeben sind.

Bei der Strutinsky-Methode verfährt man umgekehrt: Man berechnet zunächst die realistische Schalenmodell-Niveaudichte (z.B. Nilsson-Niveaus oder Saxon-Woods-Niveaus oder ähnliches, s. IV.5). Dann bestimmt man (etwas willkürlich) eine mittlere Tröpfchenmodell-Niveaudichte, indem man die Schalen durch Faltung mit einer Gauß-Funktion von geeigneter Breite γ aus-smiert.

Falls die Details des Niveauschemas für die Schalenkorrektur unerheblich sind (Annahme (I)), ist diese von Myers und Swiatecki eingeführte Methode eines Fermi-Gases mit gebündelten Niveaus die einfachere. Die Aussmierungsprozedur entfällt, man hat nur die Summe der Niveaushiftungen $\epsilon_n - \bar{\epsilon}_j$ zu bilden.

Die folgenden Rechnungen werden zunächst nur für Neutronen durchgeführt, Protonen können später analog dazu behandelt werden. Für abgeschlossene Schalen ($N = m_j$) verschwindet nach (II.3.1) und (II.3.2) die Schalenkorrektur

$$\delta E = 0 \quad (II.3.5)$$

Deshalb kann man sich auf die letzte Schale an der Fermi-Kante ϵ_N beschränken. Die zugehörigen magischen Zahlen werden mit m und M bezeichnet, der Energie-Mittelwert mit $\bar{\epsilon}$:

$$\bar{\epsilon} = \sum_m^M \frac{\epsilon_n}{(M - m)} \quad (II.3.6)$$

$$m < N \leq M \quad (II.3.7)$$

$$\delta E_N = (N-m)\bar{\epsilon} - \sum_{m+1}^N \epsilon_n \quad (II.3.8)$$

Um die Schalenkorrektur (II.3.8) der Fragmente für den eingeschnürten Kern $N=N_1+N_2$ (zwei Kugelkappen, s. Abb. 4) zu verallgemeinern, ist es naheliegend, die Summe der Schalenkorrekturen beider Teilkerne N_1, N_2 zu bilden:

$$\delta E_N = \delta E_{N_1} + \delta E_{N_2}, \quad N = N_1 + N_2 \quad (\text{II.3.9})$$

Das steht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip: Im sphärischen Compoundkern hätte man die Schalenkorrekturen zweier unabhängiger Kernhälften zu addieren. Dann sind statt der ersten N Niveaus die ersten $N/2$ Niveaus doppelt besetzt: mit einem Neutron aus der linken Kernhälfte und mit einem aus der rechten. Als Folge hätte man eine zu niedrige Fermi-Energie $\epsilon_{N/2}$.

Deshalb wird die Schalenkorrektur des eingeschnürten Kerns $N=N_1+N_2$ (Abb. 4) aus zwei sphärischen Clustern $N_i^+ \geq N_i$ berechnet, die sich teilweise überlappen und der Überlapp $N_i^+ - N_i$ durch eine Korrektur zur Besetzungszahl berücksichtigt. D.h., die N_i Nukleonen der Kugelkappe i werden auf die $N_i^+ \sim R_i^3$ Niveaus des sphärischen Clusters i gleichmäßig verteilt. Jedes Niveau des Teilkerns ist dann nur zu einem Bruchteil N_i/N_i^+ besetzt. In der Formel (II.3.8) ist dieser Faktor zweimal einzusetzen: für die Anzahl der Teilchen der letzten Schale und für jede Energie ϵ_n . Man erhält dann:

$$\delta E_{N_i} = \frac{N_i}{N_i^+} (N_i^+ - m) \bar{\epsilon} - \sum_m^{N_i^+} \frac{N_i}{N_i^+} \epsilon_n \quad (i=1,2) \quad (\text{II.3.10})$$

Man kann darin die Einteilchenenergien ϵ_n wegen der Proportionalität von ϵ_n und $n^{2/3}$ durch die Teilchenzahl n und die Fermi-Energie ϵ_N ersetzen:

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_N} = \frac{n^{2/3}}{N^{2/3}} \quad (\text{II.3.11})$$

und (analog zu ⁴⁰) die Summation durch Integration. Dann erhält man für (II.3.10)

$$\begin{aligned} \delta E_{N_1} &= \frac{N_1}{N_1^+} \frac{\epsilon_{N_1^+}}{N_1^+} \frac{1}{N_1^+} \left[\frac{1}{M-m} \int_m^M n^{2/3} dn - \int_m^{N_1^+} n^{2/3} dn \right] \\ &= \frac{N_{11}}{N_1^+} \frac{N_1^+}{N_1^+} \frac{1}{N_1^+} \left[\frac{M^{5/3} - m^{5/3}}{M - m} - N_1^{+5/3} + m^{5/3} \right] \quad (\text{II.3.12}) \end{aligned}$$

Einen analogen Ausdruck erhält man für die Schalenkorrektur δE_{Z_1} der Protonen und kann damit die gesamte Schalenenergie δE berechnen:

$$\delta E = \delta E_{N_1} + \delta E_{N_2} + \delta E_{Z_1} + \delta E_{Z_2} \quad (\text{II.3.13})$$

Bis jetzt ist angenommen worden, die Niveaus jeder Schale seien total gebündelt; das würde einer vollständigen Entartung der ganzen Schale entsprechen. Nach Ergebnissen von Myers und Swiatecki für eine Massenformel mit einer ähnlichen Schalenkorrektur erhält man eine bessere Anpassung an experimentelle Kernmassen und innere Quadrupolmomente Q_0 im Grundzustand, wenn man die Niveaus einer Schale als nur teilweise entartet annimmt und die mittlere Energie $\bar{\epsilon}$ gegenüber dem Schalenschwerpunkt nach unten verschiebt ^{40,41}). Ihre Schalenkorrektur enthält deshalb zwei empirische Parameter $C = 5.8 \text{ MeV}$ und $c = 0.325$ ⁴²).

Ersetzt man den Ausdruck (II.3.12) durch diese Funktion $S(N, Z)$, so stimmt δE mit dem Ausdruck (II.2.5) bis auf den Faktor N_1/N_1^+ statt $1_i/2R_i$ überein. Die Abweichung zwischen beiden Ergebnissen ist während der Spaltung klein (maximal 12%), wie aus Abb. 6 zu entnehmen ist.

Im nächsten Abschnitt soll dieser Schalenkorrektur-Term zunächst nur für den Spezialfall der symmetrischen Spaltung untersucht werden.

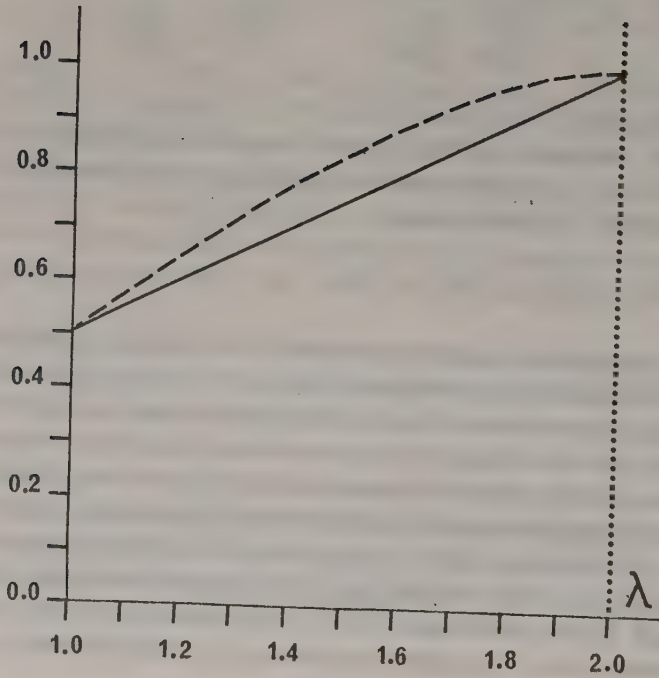


Abb.6. Vergleich des Schalenanteils $\sigma_{SH}/\sigma_{SH(Kugel)}$ in der effektiven Oberflächenspannung σ_{eff} (II.2) mit der Deformationsabhängigkeit der Schalenkorrektur $\delta E/\delta E(Kugel)$ (II.3) nach dem modifizierten Fermi-Gas (gestrichelt). λ ist die reduzierte Kernlänge $1/R_C$.

II.4 Doppelte Spaltbarriere und Sekundärminimum

Im Falle der symmetrischen Spaltung ist $R_1=R_2$, $N_1=N_2$, $Z_1=Z_2$, $l_1=l_2$,⁺) und die Schalenkorrektur vereinfacht sich zu

$$E_{SH} = S(N, A_1 r_C^3 \left(\frac{2+\lambda^3}{3\lambda^3} \right)^3, Z, A_1 r_C^3 \left(\frac{2+\lambda^3}{3\lambda^3} \right)^3) \cdot \frac{3\lambda^3}{2+\lambda^3} \quad (\text{II.4.1})$$

wenn $\lambda = 1/R_C$ ist. Diese Form hat nur einen Gestaltparameter (z.B. λ oder die Kernlänge $2l$), denn die Nukleonenzahlen N_1 , Z_1 sind durch den Radius des Clusters und dieser durch den Gestaltparameter λ bestimmt:

$$R_1 = R_C \frac{2+\lambda^3}{3\lambda^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{II.4.2})$$

$$A_1 = \frac{R_1^3}{r_C^3}, \quad N_1 = N \frac{A_1}{A}, \quad Z_1 = Z \frac{A_1}{A} \quad (\text{II.4.3})$$

Explizit:

$$E_{SH} = 2 \frac{S(N_1, Z_1)}{4\pi R_1^2} 2\pi R_1 l_1 = S(N_1, Z_1) \frac{l_1}{R_1} = S(N_1, Z_1) \frac{3\lambda^3}{2+\lambda^3} \quad (\text{II.4.4})$$

Dieser Ausdruck ist in Abb. 7 graphisch dargestellt für alle Parameterwerte λ , die während der Kernspaltung von einem sphärischen Kern bis zu zwei sich berührenden Fragmenten auftreten. Die entsprechenden Gestalten sind am oberen Bildrand zu sehen.

⁺) Im Folgenden werden die Nukleonenzahlen des Clusters i N_i^+ , Z_i^+ , $A_i^+ \sim R_i^3$ ohne "+" geschrieben, weil nur noch diese Größen auftreten. N , Z , A sind dann die Neutronen-, Protonen- und Massenzahl des Compoundkerns.

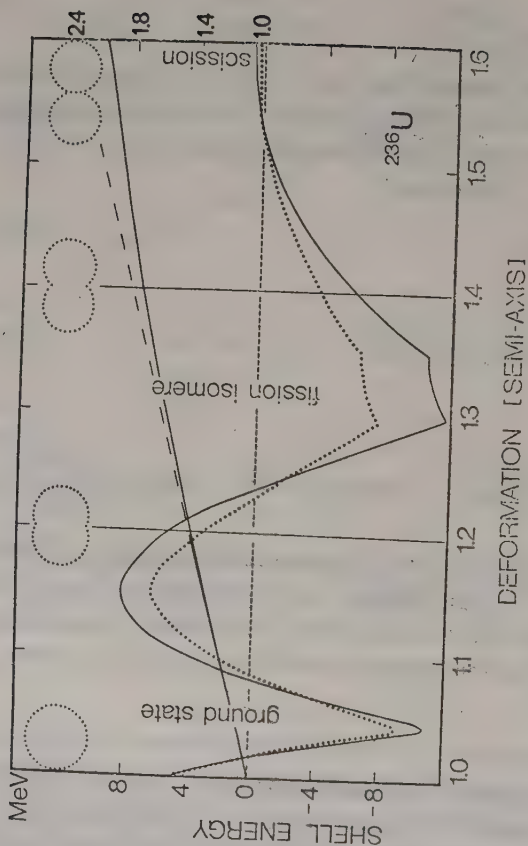


Abb. 7. Schalenkorrektur δE im Zwei-Kugel-Modell bei symmetrischer Spaltung (ausgezogene Kurve). Zum Vergleich sind das Oberflächenverhältnis (II.4.5) (ausgezogen) und dessen lineare Näherung (II.4.6) (gestrichelt) sowie die Funktion $S(N, Z)$ (gepunktet) gegen die entsprechende Kernmasse $A_1 = R_1^3 / r_0^3$ aufgetragen.

Die Schalenkorrektur dieses einfachen, einparametrischen Spaltungsmodells zeigt qualitativ alle Eigenschaften der invarianten Punkte der Potentialfläche, die im Bereich der Aktiniden wichtig sind: Der Grundzustand ist deformiert, die Schalenkorrektur hat zwei lokale Maxima (Sattelpunkte in einem 2-parametrischen Gebiet) und ein ausgeprägtes Minimum, das dem Spaltisomer entspricht. Für Aussagen über die relativen Energien von Grundzustand und zweitem Minimum, erster und zweiter Barriere müßte man zur Schalenenergie die Tröpfchenenergie addieren, doch soll das erst später für eine realistischere Parametrisierung der Kerngestalt geschehen.

Die hier verwendeten Kerngestalten sind schon nach dem reinen Tröpfchenmodell zu kurz. Es fehlt ein Hals zwischen den Clustern. Der Spaltspunkt liegt tatsächlich bei einer Kernlänge von etwa $2.5 R_0$, die Fragmente sind dann selbst deformiert.

Tab. 1 enthält die Kernlänge und das Achsenverhältnis an den Minima und Sattelpunkten der Schalenenergie im Zwei-Kugel-Modell und in der potentiellen Energie nach Rechnungen von Nilsson et al.⁶⁷⁾ mit der Strutinsky-Methode für ϵ - und ϵ_4 -Deformationen. Die Werte sind nach Formeln von Newton¹³⁴⁾ und Arseniev et al.¹³⁵⁾ aus den ϵ -Werten allein berechnet. Man sieht, daß die Kernlängen nach dem einfachen Zwei-Kugel-Modell um etwa 30% zu klein sind.

Abb. 7 enthält neben der Schalenkorrektur noch das doppelte Oberflächen-Verhältnis $2\pi R_1 l_1 / 4\pi R_1^2$

$$\frac{3\lambda^3}{2+\lambda^3} = 1 + 2(\lambda-1) + \dots \quad (\text{II.4.5})$$

und dessen lineare Näherung

$$1 + 2(\lambda-1) = 2\lambda - 1 \quad (\text{II.4.6})$$

		z_0/R_C	z_0/ρ_0	ε	ε_4
Grundzustand	Zwei-Kugel-Modell Nilsson et al. ⁶⁷⁾	1.05 1.14	1.105 1.22	0.20	-0.05
1. Sattelpunkt	Zwei-Kugel-Modell Nilsson et al. ⁶⁷⁾	1.15 1.45	1.357 1.75	0.45	
Sekundärminimum	Zwei-Kugel-Modell Nilsson et al. ⁶⁷⁾	1.3 1.61	1.912 2.02	0.605	0.06
2. Sattelpunkt	Zwei-Kugel-Modell Nilsson et al. ⁶⁷⁾	1.59 2.10	3.1	0.87	

Tab. 1. Deformation an den stationären Punkten der Energiefläche nach Nilsson et al. ⁶⁷⁾ und nach dem Zwei-Kugel-Modell (ohne Tröpfchenmodell-Energie). In der ersten Spalte steht die relative Kernlänge z_0/R_C , in der zweiten das Achsenverhältnis z_0/ρ_0 , in der dritten und vierten die ε und ε_4 -Deformation von ⁶⁷⁾ (Umrechnung von ε in z_0/R_C nach Newton ¹³⁴⁾ und Arseniev ¹⁷⁵⁾).

Das Oberflächen-Verhältnis ist während der gesamten Spaltung eine annähernd lineare Funktion des Gestaltparameters λ . Dies ist ein wesentlicher Vorteil des Zwei-Kugel-Modells gegenüber den realistischen Deformationen, die später diskutiert werden. Denn in diesem Modell stimmt die Schalenkorrektur δE qualitativ mit der auf die Massenzahl $(R_i/r_c)^3$ bezogenen "sphärischen" Schalenkorrektur $S(N_i, Z_i)$ überein. Diese Funktion ist ebenfalls in Abb. 7 graphisch dargestellt.

Die Funktion $S(N, Z)$ schwankt zwischen positiven und negativen Werten von etwa 10 MeV, je nachdem, ob der Kern (N, Z) in der Mitte oder am Ende einer Schale liegt. Das Oberflächen-Verhältnis wächst während der Kernspaltung fast linear mit der Kernlänge von 1/2 bis 1. Für viele qualitative Überlegungen der nächsten Abschnitte kann man deshalb diesen Faktor gleich 1 setzen, und das Oberflächen-Verhältnis gegenüber der stark schwankenden Funktion $S(N, Z)$ vernachlässigen. Dann ist die Schalenenergie eines deformierten Kerns die Summe zweier Myers-Swiatecki-Funktionen $S(N_1, Z_1) + S(N_2, Z_2)$. Das bedeutet: Bis auf den vernachlässigten Faktor (II.4.5) ist die Gestaltabhängigkeit von δE in diesem Modell gleich der Ladungs- und Massen-Abhängigkeit von $S(N_i, Z_i)$. In graphischen Darstellungen der potentiellen Energie eines Kerns als Funktion seiner beiden Gestaltparameter zeigen sich deshalb Strukturen, die dem Tal der stabilen Kerne in der Umgebung des untersuchten Kerns ähnlich sind. Da die zweite Abhängigkeit von den Massentabellen her gut bekannt ist, kann man dann Schaleneffekte in deformierten Kernen an analogen Schaleneffekten in den Kernmassen studieren. Das soll in den nächsten Abschnitten mit Hilfe des Zwei-Kugel-Modells geschehen.

II.5 Existenz von Gestaltisomeren im Periodensystem

Versuche, die Existenz von Spaltisomeren (bzw. Gestaltisomeren bei γ -Übergang zum Grundzustand) im Tal der stabilen Kerne zu beschreiben, sind bis jetzt sehr schematisch. Z.B. haben Metag et al.¹⁴⁰⁾ als Schalenkorrektur eine Cosinus-Funktion benutzt und deren Amplitude und Wellenlänge angepaßt. Danach sind Spaltisomere zwischen $Z=90$ und $Z=98$ zu erwarten.

Auch im Zwei-Kugel-Modell ist eine Schätzung möglich, in welchem Bereich der N - Z -Ebene ausgeprägte Sekundärminima existieren könnten, wenn man annimmt, daß die Spaltung bis zum zweiten Minimum symmetrisch verläuft. Diese Annahme stimmt überein mit Ergebnissen nach der Strutinsky-Methode von Nilsson et al.⁶⁷⁾, Pashkevich¹³⁹⁾, Pauli et al.¹³¹⁾ und ist innerhalb des Modells konsistent (vgl. II.8). Nach II.4 ist ein Sekundärminimum in der Deformationsenergie genau dann zu erwarten, wenn in der "ungedämpften"^{40,41)} Schalenfunktion $S(N,Z)$ ein zweites Minimum auf dem Wege in der N - Z -Ebene auftritt, der durch die Nukleonenzahlen eines Clusters während der Spaltung bestimmt ist. Dieser Weg ist eine Strecke von dem Punkt (N,Z) , (sphärischer Compoundkern) zum Punkt $(N/2, Z/2)$ (sphärische Fragmente). Nach dieser Überlegung gilt folgende Vorschrift, Sekundärminima zu finden: Man verbinde in Abb. 3 den Punkt (N,Z) , der dem Compoundkern entspricht, mit dem Koordinatenursprung. Dann betrachte man die äußere Hälfte dieser Strecke. Liegt auf dieser Strecke nur ein Minimum, oder ist das zweite Minimum ein Randminimum, so ist bei diesem Kern kein Sekundärminimum zu erwarten.⁴⁾

Dieses Verfahren kann man noch weiter schematisieren, wenn

⁴⁾ Abb. 3 zeigt die Schalenkorrektur noch mit den alten Parametern^{40,41)}. Die neuere Version^{42,43)} unterscheidet sich in den Höhen etwas davon.

man statt dieser Strecke ein entsprechendes Stück im Tal der stabilen Kerne betrachtet. Wegen der schwachen Krümmung dieses Tales fallen beide Wege fast zusammen. Man kann dann die Schalenkorrektur $\delta E \sim S(N_1, Z_1)$ der Abb. 2 entnehmen. Diese Funktion hat ausgeprägte Minima bei $N=Z=2$, $N=Z=8$, $N=14$, $N=28$, $N=50$ und $N=82$. Danach sind Sekundärminima höchstens dann zu erwarten, wenn den Clustern auf dem Weg zur Spaltung Neutronenzahlen zugeordnet werden, die diesen Minima entsprechen. Weil auf diesem Weg alle Neutronenzahlen von dem N des Compoundkerns bis zu $N/2$ durchlaufen werden, ergibt sich als notwendige Bedingung für die Existenz von Sekundärminima, daß

$$N/2 \leq N_{\text{magisch}} \leq N \quad (\text{II.5.1})$$

für zwei magische Neutronenzahlen

$$N_{\text{magisch}} \in \{2, 8, 14, 28, 50, 82\} \quad (\text{II.5.2})$$

erfüllt sein muß (e i n N_{magisch} für den u.U. deformierten Grundzustand).

Tab. 2 gibt die so bestimmten Kerne mit möglichen Spaltisomeren (mit der üblichen magischen Zahl 20 statt 14) an. Die Anzahl der Spaltisomere ist eher zu hoch geschätzt, da sie nur unter einer notwendigen Bedingung gewonnen sind. Tatsächlich kann die Tröpfchenmodell-Energie das zweite Minimum der Schalenenergie unterdrücken, wenn es zu weit vom Tröpfchenmodell-Sattelpunkt entfernt ist und dann in den steilen Abfall der Tröpfchenmodell-Energie trifft. Wie man aus Strutinsky-Rechnungen weiß, ist das bei Überschweren Elementen und bei den schwersten Aktiniden der Fall.

Nach diesem Schema bleiben höchstens vier Gebiete, in denen man Gestaltisomere vermuten kann:

1. zwischen Ca und Ge von $N=20$ bis $N=39$

Magische Zahl		$N_{\min}$	$N_{\max}$	Gestaltisomeren-Intervall	Elemente
$N(1)$	$N(2)$				
2	8	8	3		
8	20	20	15		
20	28	28	39		
28	50	50	55	$N=28-39$	Ca - Ge
50	82	82	99	$N=50-55$	Kr, Sr, Zr, Y, Mo, Ru
82	126	126	163	$N=82-99$	Seltene Erden bis Er
				$N=126-163$	Pb, Aktiniden

Tab.2. Existenz von Gestaltisomeren nach der notwendigen Bedingung $N/2 < N(2) < N(1) \leq N$ (II.5.1 und II.5.2) mit den magischen Neutronenzahlen des Grundzustandes $N(1)$ und des Sekundärminimums $N(2)$. Die magische Zahl 14^{40-43} ist durch 20 ersetzt.

2. zwischen Krypton und Ruthenium von $N=50$ bis $N=55$,
3. in den seltenen Erden bis Erbium,
4. von Blei bis zu den schweren Aktiniden.

Allen drei Gebieten ist gemeinsam, daß sie am Anfang einer Neutronenschale beginnen und etwa bis zur Mitte der Schale reichen.

Experimentell wurden bis jetzt Spaltisomere nur im Bereich der Aktiniden gefunden mit Lebensdauern zwischen 2 ns und 14 ms für die Elemente U bis Bk^{28,36,39,140-144}). Metag et al.¹²³⁾ haben mit Hilfe der Strutinsky-Methode auch für leichtere Kerne ein Sekundärminimum vorausgesagt (in der Gegend um Ca⁴⁰).

Damit sind für zwei der vier Gebiete von Tabelle 2 Spaltisomere gefunden bzw. berechnet worden. Ob auch in den beiden anderen Gebieten Spaltisomere zu finden sind, kann ohne Tröpfchenmodell-Energie nicht entschieden werden, weil die Tabelle nur nach einer notwendigen Bedingung berechnet ist. Für Th²³² findet man z.B. mit der Schalenkorrektur δE aus II.2 bei realistischen Deformationen kein zweites Minimum mehr (vgl. IV.5).

II.6 Relative Höhe der zweiten Barriere

Ein systematischer Trend in den doppelten Spaltbarrieren der Aktiniden ist die relative Höhe der beiden "Höcker" der Spaltbarrieren^{67,129,132)}. Bei den leichten Aktiniden ist die zweite Barriere die höhere, mit zunehmender Kernmasse kehrt sich dieses Verhältnis um, etwa bei Fm verschwindet die zweite Barriere fast ganz. Das zeigt sich wegen der Durchdringungswahrscheinlichkeit in der Spaltlebensdauer der Isomere, die ebenfalls deutlich abnimmt¹⁴⁰⁾. Dieser Effekt kommt zum Teil daher, daß die Tröpfchenmodell-Energie bei den schweren

Aktiniden schneller abfällt als bei den leichten. Aber auch in der Schalenkorrektur allein wird die zweite Barriere mit zunehmender Masse immer kleiner¹²⁹⁾.

Diese Tendenz wird von der Schalenkorrektur δE aus II.2 richtig wiedergegeben. In Tab. 3 ist in der fünften Spalte die relative Barrierenhöhe in der Schalenenergie nach dem Zwei-Kugel-Modell und die relative Höhe der zweiten Barriere in der potentiellen Energie nach Nilsson et al.⁶⁷⁾ +) angegeben. Die Tendenz ist deutlich, wegen der geringen lokalen Schwankung der Tröpfchenmodell-Energie stimmen sogar die Größenordnungen mit den nach der Strutinsky-Methode für ε - und ε_4 -Deformationen berechneten Werten überein.

II.7 Massenasymmetrie

Auf dem Gebiet der Kernspaltung war die Diskrepanz zwischen zwischen experimenteller Massenausbeute¹⁴⁵⁻¹⁴⁷⁾ und theoretischen Ergebnissen mit der wichtigste Grund, nach Verbesserungen in der Theorie zu suchen. Schon die potentielle Energie nach Bohr und Wheeler²⁾ begünstigt die symmetrische Spaltung, obwohl experimentell von Th bis Cf die asymmetrische Spaltung wahrscheinlicher ist als die bei leichteren und schweren Aktiniden vorherrschende symmetrische Aufteilung. Es ist im Tröpfchenmodell nie gelungen, diese Diskrepanz zu beseitigen. Deshalb wäre eine Schalenkorrektur vor allem dann erfolgversprechend, wenn sie bei den Aktiniden die Spaltung in ungleiche Bruchstücke energetisch bevorzugt.

Das Zwei-Kugel-Modell ist nicht gut geeignet, die asymmetrische Spaltung zu beschreiben, weil die Gestalt der Fragmente

+) 67) enthält keine Angaben über die Schalenkorrektur allein.

Z	N	Element	A	hier	2.Barriere (MeV) Nilsson et al. 67)	Differenz
92	144	U	236	8	6.5	1.5
94	146	Pu	240	6	5.1	0.9
96	148	Cm	244	5	3.2	1.8
98	150	Cf	248	3	1.6	1.4
100	152	Fm	252	1	0.6	0.4

Tab.3. Höhe der zweiten Barriere relativ zum zweiten Minimum in der Schalenkorrektur δE nach II.2 und in der potentiellen Energie nach Nilsson et al. 67).

auf der Zerreißlinie zu unrealistisch ist. Die Fragmente sind nach dem Tröpfchenmodell (Cohen und Swiatecki^{19,20}) und nach ihren gemessenen Anregungsenergien^{55,149,150}) am Zerreißpunkt deformiert - was im Zwei-Kugel-Modell nicht beschrieben werden kann. Das hat zur Folge, daß die Tröpfchenmodell-Energie die symmetrische Spaltung viel stärker energetisch begünstigt, als es bei realistischen Deformationen der Fall wäre. Z.B. bei dem Compoundkern U^{236} wächst die Tröpfchen-Energie um etwa 100 MeV, wenn man von gleichen Fragmentmassen ($A_H=118$, $A_L=118$) zu den experimentell wahrscheinlichsten (etwa $A_H=140$, $A_L=96$)¹⁵¹) übergeht. Der Hauptgrund für das starke Anwachsen ist die Coulomb-Selbstenergie des schweren Fragments, diese ist bei sphärischer Gestalt maximal und reagiert deshalb sehr empfindlich auf den Ladungszuwachs bei zunehmender Massenasymmetrie. Bei realistischen Fragmentgestalten beträgt der entsprechende Energiezuwachs nur einige MeV.

Da die Schalenkorrektur eine Amplitude von nur einigen MeV hat, läßt die unrealistische 100-MeV-Schwankung der Tröpfchenmodell-Energie des Zwei-Kugel-Modells keine Möglichkeit, ein asymmetrisches Minimum der potentiellen Energie am Spaltzentrum auszubilden.

Um diese Schwierigkeit mit der Gestalt zu umgehen, wurde zur Berechnung der kinetischen und Anregungsenergien der Fragmente deshalb oft ein Halsstück zwischen diesen eingeführt, dessen Beitrag zur Energie vernachlässigt wird^{52,55,152}). Diese Autoren nehmen am Zerreißpunkt eine Distanz von etwa einem Fermi zwischen den Fragmenten an, um die unrealistische Fragmentgestalt (Rotationsellipsoide) zu kompensieren.

Da im Zwei-Kugel-Modell die Schwankung der Coulomb-Energie der beiden sphärischen Fragmente um eine Größenordnung falsch ist, soll diese unrealistische Tröpfchenmodell-Energie ganz unberücksichtigt bleiben und die Schalenenergie allein unter-

sucht werden.

Die Schalenkorrektur für den allgemeinen Fall zweier ungleicher Fragmente ist in Formel (II.2.5) angegeben worden. Abb. 8 zeigt ein Schichtlinienbild dieser Korrektur. Als Ordinate ist die Massenzahl A_L des leichten Fragments aufgetragen bzw. die dem leichten Cluster zugeordnete, als Abszisse die des schweren A_H . Die symmetrische Spaltung der Abb. 7 entspricht dem Weg auf der Winkelhalbierenden von der Massenzahl A des Compoundkerns bis $A/2$, der Massenzahl der Fragmente. Bei $A_H=A_L=236$ liegt der sphärische Compoundkern, bei $A_H=A_L=207$ dessen Grundzustand, bei $A_H=A_L=165$ der erste Sattelpunkt (der potentiellen Energie), bei $A_H=A_L=130$ das Spaltisomer, und die zweite Barriere der Schalenenergie fällt mit dem symmetrischen Spaltpunkt $A_H=A_L=118$ zusammen.

Die zweite Grenze des Schichtlinienbildes wird von der Spaltlinie $A_H+A_L=236$ gebildet. In der Bildmitte ($A_H=A_L=118$) sind die beiden Fragmente gleich schwer, nach rechts unten nimmt die Massenasymmetrie A_H-A_L zu. Längs dieses Weges ist in Abb. 9 die Schalenkorrektur dargestellt. Die Kurve ist hier nicht mehr wie in Abb. 7 bis auf einen Faktor die ursprüngliche Schalenfunktion $S(N,Z)$, sondern ist aus der Überlagerung zweier solcher Funktionen entstanden. Gemeinsam sind beiden Bildern die deutlichen Minima an den Stellen, wo die Nukleonenanteile N und Z eines Clusters etwa doppelt magisch werden ($A_H \approx 50+82$, $A_L \approx 28+50$, $A_H \approx 82+126$).

Auch in der Abb. 8 sieht man deutlich den Einfluß der magischen Zahlen (durch Geraden markiert): Die Schalenenergie ist niedrig, wo einem der Cluster eine magische Protonen- oder Neutronenzahl entspricht. Das gilt besonders für die etwa doppelt magischen Cluster ($Z=82, N=125$), ($Z=50/52, N=78/82$). Für die Fragmentmassen ist diese zweite Kombination entscheidend. Sie erzeugt ein Tal in dem Energiegebirge, das vom zweiten Minimum bis zum asymmetrischen Spaltpunkt bei ($A_H=134, A_L=102$)

SHELL CORRECTION

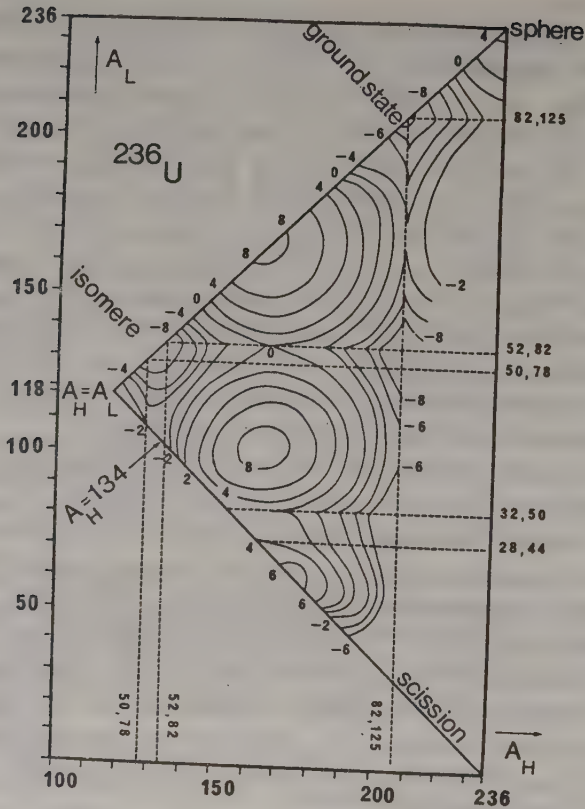


Abb.8. Schalenkorrektur von ^{236}U im Zwei-Kugel-Modell. Deformationsparameter sind die den Clustern zugeordneten Massenzahlen $A_H = R_H^3/r_C^3$ und $A_L = R_L^3/r_C^3$. Die symmetrische Spaltung entspricht der Strecke $A_H = A_L$. Die Zerreißlinie ist durch $A_H + A_L = A$ definiert. Magische Cluster sind durch gestrichelte Linien markiert.

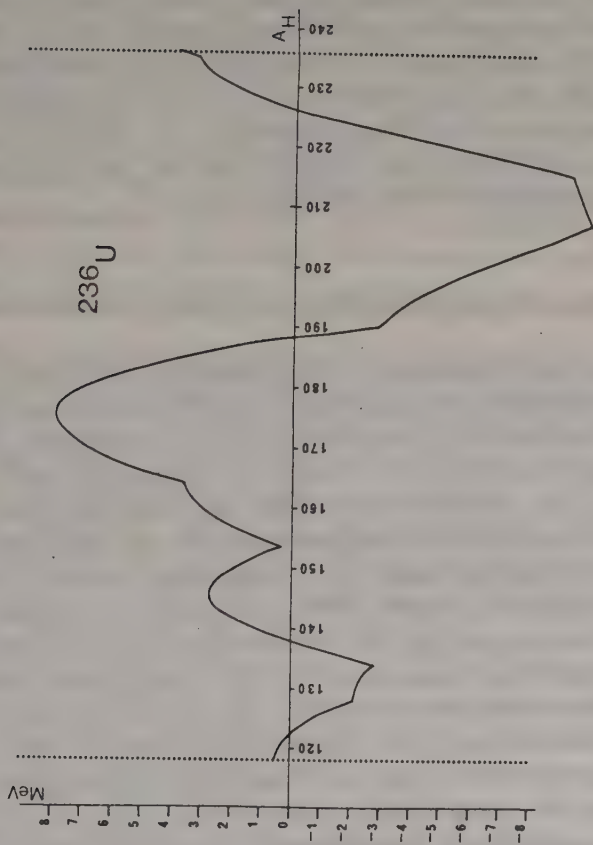


Abb. 9. Schalenenergie von ^{236}U gegen die Massenzahl A_H des schweren Fragments. Der linke Bildrand entspricht symmetrischer ($A_H = A_L = 118$), der rechte total asymmetrischer Spaltung ($A_H = 236, A_L = 0$).

verläuft. Dieser Punkt liegt um 3,3 MeV tiefer als der der symmetrischen Spaltung entsprechende ($A_H = A_L = 118$). Diese Energiedifferenz würde bei einer realistischen Tröpfchenmodell-Energie gerade ausreichen, die asymmetrische Spaltung energetisch günstiger erscheinen zu lassen als die symmetrische. Die energetisch günstigste schwere Fragmentmasse ($A_H = 134$) liegt in der Nähe der experimentell wahrscheinlichsten (bei $A_H = 140$).

Zwar ist nicht sicher, ob eine dynamische Berechnung der Massenausbeute auch gerade an dieser Stelle den schweren "Peak" hätte, doch erzeugt die Schalenkorrektur δE bereits in diesem einfachen Modell die nötige Instabilität der potentiellen Energie gegen asymmetrische Deformationen.

II.8 Asymmetrische Deformationen im Verlauf der Spaltung

Je nach dem verwendeten Einteilchen-Potential und der gewählten Parametrisierung der Kerngestalt schwanken die Ergebnisse der Strutinsky-Methode für die wichtigsten Eigenschaften der Aktiniden: z.B. Höhen und Deformation der beiden Barrieren, Lage des zweiten Minimums und Höhe über dem Grundzustand. In Bezug auf die Massenasymmetrie hat sich jedoch eine auffallende Übereinstimmung aller Rechnungen gezeigt: Asymmetrische Deformationen treten erst am zweiten Sattelpunkt auf, der erste Sattelpunkt und das zweite Minimum der potentiellen Energie entsprechen Kerngestalten, die symmetrisch eingeschnürt sind. Experimentelle Daten hierzu sind bis jetzt nicht bekannt. Asymmetrische Deformationen ergeben sich auch bei dem Schalenenergie-Term (II.2.5). Dies gilt auch für realistischere Deformationen als den sphärischen Clustern hier (vgl. IV.10).

Es ist bisher als Merkwürdigkeit empfunden worden¹³⁹, daß diese Asymmetrie sich nicht allmählich ausbildet und nicht

schon im zweiten Minimum vorhanden ist. Nach Abb. 8 kann man diesen Sachverhalt als Sekundärschalen-Effekt deuten.

Minima der Schalenenergie liegen dort, wo beide Cluster doppelt magisch sind. Das ist dann der Fall, wenn beide Cluster gleich sind (d.h. symmetrische Deformation) oder wenn sie sehr stark asymmetrisch sind. Die Koordinaten (A_H, A_L) haben dann die Werte (82+126, 28+50) bzw. (82+126, 50+82). Im zweiten Fall erzeugt die die Schalenkorrektur in der steilen Tröpfchen-Energie kein lokales Minimum. Deshalb tritt das zweite Minimum bei symmetrischer Deformation auf. Wäre der Kern im zweiten Minimum der Schalenenergie asymmetrisch deformiert, so hätten beide Fragmente nach II.3 unterschiedliche Schalenstruktur. Die Sekundärschale könnte sich dann noch deutlicher ausbilden, indem beide Cluster die Gestalt des energetisch günstigeren annehmen, d.h. die Deformation minimaler Energie ist symmetrisch.

Eine entsprechende Argumentation gilt für die lokalen Maxima der Schalenenergie; sie liegen bei symmetrischer Deformation $A_H = A_L$. Deshalb kann man die Maxima auf dem Weg vom ersten zum zweiten Minimum und von dort zur Spaltlinie umgehen, wenn man die symmetrische Achse $A_H = A_L$ verläßt. So erreicht man z.B. die Spaltlinie $A_H + A_L = A$ auf dem niedrigsten Weg, wenn man vom zweiten Minimum ($A_H = A_L \approx 50+82$) aus dem magischen Tal $A_H \approx 50+82$ folgt, d.h. dem einen Cluster seine Sekundärschalenstruktur läßt und nur den anderen verformt.

Der zweite Sattelpunkt, der in U^{236} die Paßhöhe bestimmt, wird also bei asymmetrischen Deformationen liegen. Für den ersten Sattelpunkt kann allein aus der Schalenenergie nicht genauso geschlossen werden, weil die Tröpfchenenergie bei asymmetrischen Deformationen dort steiler ist. Für eine realistische Parametrisierung wird in IV.9 gezeigt, daß U^{236} am ersten Sattelpunkt der potentiellen Energie symmetrisch deformiert ist.

III. Realistische Kerngestalten

Das in II betrachtete Zwei-Kugel-Modell der Kernspaltung hat den Vorteil, viele Eigenschaften der Spaltung mit sehr wenig Rechnung qualitativ zu beschreiben. Von der Schalenkorrektur II.2.5 soll gezeigt werden, daß sie zu Ergebnissen führt, die mit experimentellen Daten übereinstimmen oder, wo Messungen fehlen, mit den Voraussagen der Strutinsky-Methode vergleichbar sind. Deshalb wird im Folgenden die potentielle Energie für dreiparametrische Deformationen untersucht, von denen angenommen werden kann, daß sie der tatsächlichen Kerngestalt nahekommen.

III.1 Parametrisierung der Kerngestalt

Eine der Schwierigkeiten in der Statik der Kernspaltung besteht darin, die Kerngestalt durch einen Satz von Parametern so zu beschreiben, daß zwar genügend Freiheitsgrade berücksichtigt werden, aber die Energie berechenbar bleibt. Für den erforderlichen Kompromiß müssen viele mögliche Freiheitsgrade eines Kerns vernachlässigt werden. Nix^{153,154)} und Swiatecki¹⁵³⁾ geben z.B. allein für die Fragmente am Zerreißpunkt 17 Freiheitsgrade an, wobei nur je zwei Freiheitsgrade die Fragment-Deformation (Ellipsoide) beschreiben. Die Auswahl der wenigen "wichtigen" Freiheitsgrade ist subjektiv, und es sind im Laufe der Zeit immer neue Parametrisierungen der Kerngestalt aufgekommen.

Die weit verbreitete von Bohr¹⁵⁵⁾ beschreibt den Kern durch eine Entwicklung des Kernradius nach Kugelflächenfunktionen in sphärischen Polarkoordinaten.

$$R(\vartheta, \varphi) = R_C \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (\text{III.1.1})$$

Meistens wird der Kern während der Spaltung als rotationssymmetrisch angenommen, und die Entwicklung (III.1.1) geht in eine nach Legendre-Polynomen über (Bohr und Wheeler 1939²⁾).

$$R(\vartheta) = R_C \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} a_l P_l(\cos \vartheta) \right) \quad (\text{III.1.2})$$

Das hat den Vorteil, daß man die Tröpfchenmodell-Energie als Entwicklung um die sphärische Gestalt schreiben kann. (Bohr und Wheeler²⁾, Swiatecki^{5,23)}, Present et al.^{16,17)}, Frankel und Metropolis¹⁸⁾, Cohen und Swiatecki¹⁹⁾, Businaro und Gallone¹⁵⁶⁻¹⁵⁸⁾). Ähnliche Entwicklungen sind um ein Rotationsellipsoid gemacht worden^{5,18,19,23,156-158)} und im letzten Jahr von Pashkevich¹³⁹⁾ und Adeev et al.^{124,160)} um eine Cassini-Kurve.

Entwicklungen in sphärischen Polarkoordinaten haben den Nachteil, daß der Radiusvektor nur als eindeutige Funktion des Winkels beschrieben werden kann. Das führt zu unnötigen Beschränkungen bei der Einschnürung des Kerns. Lawrence¹⁶¹⁾ hat deshalb vorgeschlagen, die Kernoberfläche durch einen Rotationskörper in Zylinderkoordinaten zu beschreiben, der durch eine Kurve 4. Ordnung begrenzt wird. Seine Parametrisierung umfaßt Rotationsellipsoide und symmetrisch eingeschnürte Körper bis zu zwei sich berührenden Fragmenten. Das wurde von Hasse, Ebert und Süßmann¹⁶²⁾ und später auf ähnliche Weise von Pauli, Ledergerber und Brack¹³¹⁾ für asymmetrische Spaltung verallgemeinert.

Nach¹⁶²⁾ wird die Kernoberfläche in Zylinderkoordinaten φ , z , φ durch die folgende Randkurve beschrieben:

$$\varphi^2 = N (R_C^2 x_2^2 - z^2) (R_C^2 x_4^2 + (z - R_C x_3)^2) \quad (\text{III.1.3})$$

$$z \in [-R_C, R_C] \quad , \quad x_3 \in [-x_2, x_2] \quad , \quad x_4' \in [0, \infty] \quad . \quad (\text{III.1.4})$$

In dieser Formel sind $\alpha_2, \alpha_3, \alpha'_4$ die Gestaltparameter, $R_c = r_c A^{1/3}$ der (Ladungs-) Radius des Kerns. Der Faktor $N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha'_4)$ bewirkt die hier angenommene Volumenerhaltung während der Kernspaltung:

$$N^{-1} = \alpha_2^3 \left(\frac{1}{5} \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4'^2 \right) R_c^2 \quad (\text{III.1.5})$$

Die Parameter $\alpha_2, \alpha_3, \alpha'_4$ entsprechen der Kernlänge, der Massenasymmetrie und der Einschnürung des Kerns. Sie sind hier in Analogie zur üblichen Legendre-Entwicklung indiziert. ($\alpha_2 = \zeta_0, \alpha_3 = \zeta_1, \alpha'_4 = \zeta_2$ in ¹⁶²).

Der Einschnürungsparameter α'_4 läuft während der Spaltung von ∞ (keine Einschnürung) bis 0 (totale Einschnürung). Für diesen Parameter sind mehrfach Verbesserungen vorgeschlagen worden (v. Groote und Hilf⁹⁴), Schirmer¹⁶⁴).

In dieser Arbeit wird wie in ¹⁶⁵ der Parameter α_4 benutzt, der folgendermaßen mit α'_4 zusammenhängt:

$$\alpha_4 (\alpha_2, \alpha'_4) = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2 + 5\alpha_4'^2} \quad (\text{III.1.6})$$

$$\alpha_4' (\alpha_2, \alpha_4) = \alpha_2 \sqrt{\frac{1 - \alpha_4}{5\alpha_4}} \quad \alpha_4 \in [0, 1] \quad (\text{III.1.7})$$

Dieser neue Parameter α_4 hat eine feste geometrische Bedeutung: α_4 ist die Abnahme des Kernquerschnitts bei der Einschnürung in Prozent. Abb. 10 zeigt einige Kerngestalten für $\alpha_4 = 0, 1/2$ und 1 und die Abb. 11 die inneren Quadrupolmomente Q_0 als Maß für die Deformation.

Diese geometrische Definition des Einschnürungsparameters hat gegenüber der ursprünglichen mehrere Vorteile (nach ¹⁶⁵):

- (1) Der Einschnürungsparameter wächst mit zunehmender Einschnürung, d.h. er wächst während der Kernspaltung.
- (2) Die Grenzwerte 0 (keine Einschnürung) und 1 (völlige

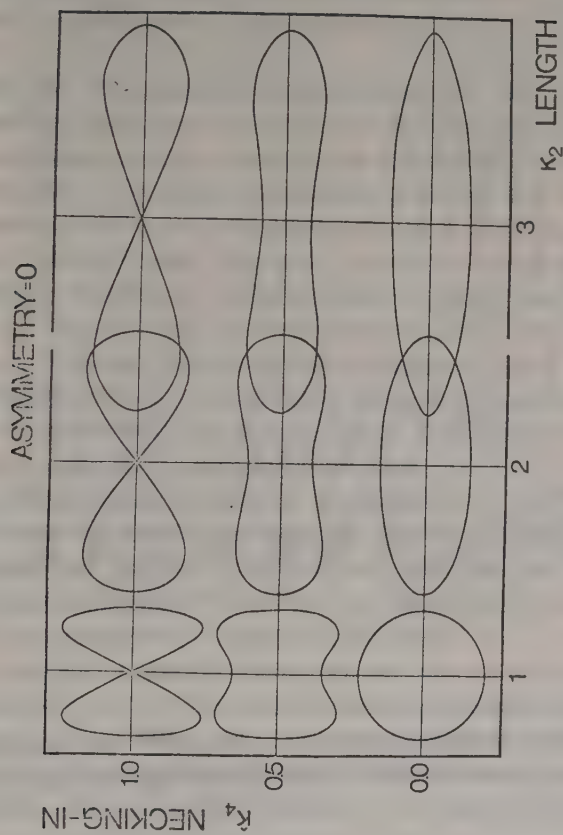


Abb. 10. Kerndeformationen als Funktion der Gestaltparameter x_2 und $x_4 (= \hat{x}_4)$. Der Asymmetrie-Parameter x_3 ist gleich Null gesetzt.

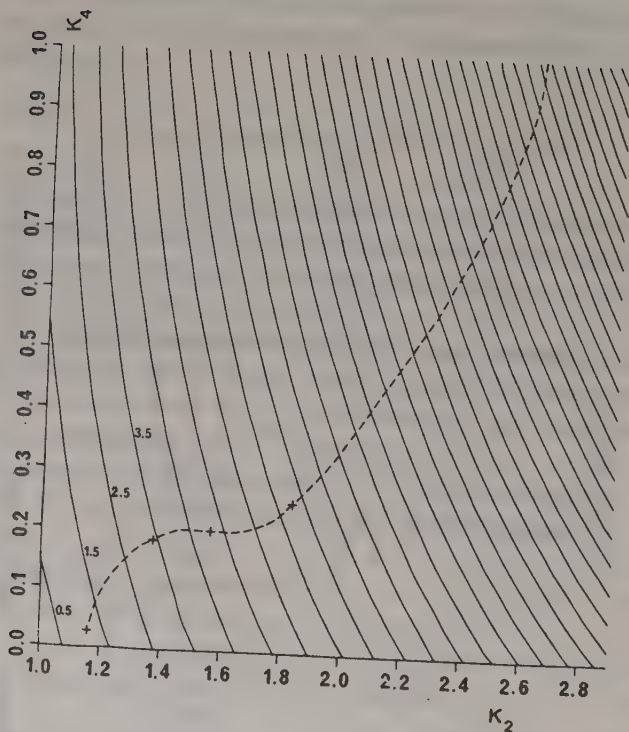


Abb.11. Innere Quadrupolmomente Q_0 von U^{236} im Parameter-Gebiet $(x_2, x_3=0, x_4)$ der Abb.10. Die Einheit ist 10 barn.

Einschnürung) sind endlich und erleichtern die Anschauung bei Zwischenwerten.

(3) Der Einfluß der Kernlänge auf die Einschnürung wird berücksichtigt: Wenn z.B. ein Kern bei konstantem Halsquerschnitt verkürzt wird, nimmt die Einschnürung in dem Maße zu wie der Querschnitt des zugeordneten (nicht eingeschnürten) Rotationsellipsoids.

(4) Einige bei der Kernspaltung übliche Begriffe (wie der "minimale" Weg zur Spaltung oder die "Spaltrichtung") sind keine differentialgeometrischen Invarianten der Potentialfläche. Sie hängen von der jeweiligen Parametrisierung ab und können bei nichtlinearen Parameter-Transformationen ihre genaue Bedeutung verändern. Benutzt man, wie hier, einen Satz von Parametern mit geometrischer Bedeutung, so kann diese Willkür verringert werden. Da diese Parameter gegenüber anderen mathematisch möglichen durch ihre geometrische Bedeutung ausgezeichnet sind, sind nur Transformationen zu ähnlichen Parametern vernünftig. Unter solchen Transformationen können nicht invariante Begriffe ihre Bedeutung (zumindest ungefähr) behalten.

Für den Einschnürungsparameter α_4 könnte man z.B. die Zylinderkoordinate ρ statt des Querschnitts $2\pi \rho^2$ benutzen. Diese Transformation verzerrt das Potentialgebirge weit weniger als etwa die nach Gleichung (III.1.7), wo zu einem Parameter ohne geometrische Bedeutung transformiert wird.

Außerdem hat ein geometrisches Maß für die Einschnürung den großen Vorteil, daß es in jeder Parametrisierung definiert werden kann. Auf diese Weise kann man Ergebnisse verschiedener Parametrisierungen einigermaßen objektiv vergleichen, die sich auf eingeschnürte Kerngestalten beziehen, wie Sattelpunkte oder Minima.

III.2 Lokale und globale Krümmung

Die Schalenkorrektur (II.2.5) läßt sich nicht ohne weiteres auf die im letzten Abschnitt beschriebene Parametrisierung der Kerngestalt anwenden, weil die Zuordnung zwischen Cluster und Schalenfunktion $S(N,Z)$ durch den konstanten Radius des Clusters vermittelt wurde. Im allgemeinen ist dieser Radius auch nicht näherungsweise konstant (vgl. Abb. 10).

Einen Radius $\bar{R}$ könnte man über den Mittelwert der Krümmung des Clusters definieren:

$$1/\bar{R} = \langle K \rangle = \oint K \, dS / \oint dS \quad (III.2.1)$$

$$\delta E = S(N(\bar{R}), Z(\bar{R})) \quad (III.2.2)$$

wobei offen bleibt, was als lokale Krümmung anzusehen ist. Denn schon in der Differentialgeometrie sind mehrere Definitionen üblich und weitere sind möglich (vgl. III.4).

Als Alternative zu einem mittleren Radius kann man versuchen, die Kerngestalt durch sphärische Teilstücke zu approximieren, wie es in Abb. 12 für vier Teile gezeigt ist. Für das allgemeine n-Kugel-Modell ist die Schalenkorrektur analog zu (II.2.5), nur ist die Summation über n Summanden zu bilden.

$$\delta E = \sum_{i=1}^n S(N_i, Z_i) \, 2\pi l_i R_i / 4\pi R_i^2 \quad (III.2.3)$$

Im allgemeinen wird man eine vorgegebene Kerngestalt umso besser approximieren können, je größer die Zahl n ist. Für $n \rightarrow \infty$ bestimmt die lokale Krümmung den Radius, und die Schalenkorrektur wird zu einem Oberflächen-Integral über die lokale Dichte der Schalenenergie:

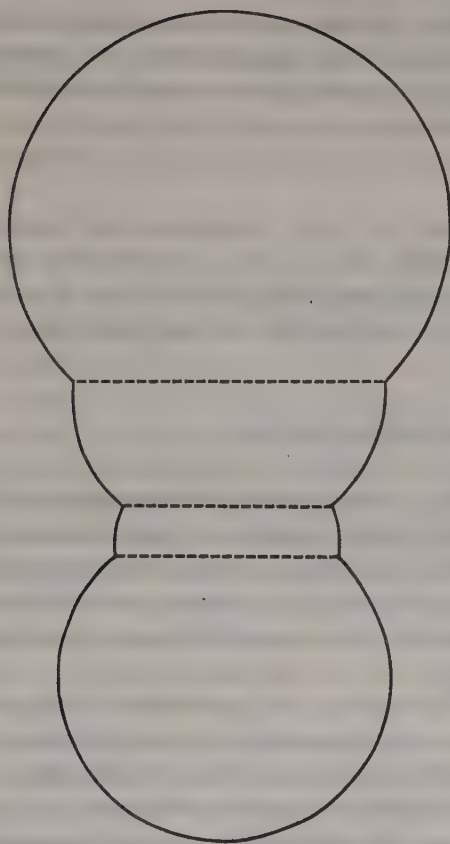


Abb.12. Verallgemeinerung des Zwei-Kugel-Modells für rotationssymmetrische Gestalt.

$$R = 1/K \quad (\text{III.2.4})$$

$$\delta E = \oint S(N(R), Z(R)) / 4\pi R^2 \, dS \quad (\text{III.2.5})$$

Um zu entscheiden, welche der beiden hier beschriebenen Verallgemeinerungen für R die angemessene ist, wird ein effektiver Radius R_α als gewichteter harmonischer Mittelwert von K^{-1} und $\bar{K}^{-1}$ angenommen

$$R_\alpha^{-1} = \alpha \bar{K} + (1-\alpha) K \quad (\text{III.2.6})$$

und der Gewichtungsfaktor α durch Anpassung nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt, die in III.3 beschrieben werden. Die besten Ergebnisse erhält man für $\alpha = 0.7$, d.h. die globale Krümmung ist zu 70% am effektiven Radius beteiligt.

III.3 Anpassung des Gewichtungsfaktors

Der Gewichtungsfaktor α der beiden Krümmungen im effektiven Radius (III.2.6) beeinflusst sowohl die Amplitude als auch die Wellenlänge der Schalenkorrektur erheblich. Diese Effekte hängen nicht monoton von α ab, es kommt vielmehr darauf an, wie weit der untersuchte Kern von einer magischen Konfiguration entfernt ist.

Deshalb ist es fraglich, ob ein einheitlicher Gewichtungsfaktor für lokalen und globalen Anteil der Krümmung existiert, der sowohl innerhalb eines weiten Bereichs der Nuklidkarte, als auch für möglichst beliebige Deformationen gilt. Im Idealfall könnte man α an die Deformation der differentialgeometrisch invarianten Punkte der Energiefläche, Grundzustand, erster und zweiter Sattelpunkt und Sekundärminimum, im ganzen

Periodensystem anpassen. Abgesehen von der dazu benötigten Computerzeit, mangelt es vor allem an Vergleichsmöglichkeiten: Nur die Grundzustandsdeformationen sind in weiten Bereichen des Periodensystems gut gemessen. Deshalb wurde in ¹⁶⁶⁾ der Gewichtsfaktor an experimentelle Grundzustandsdeformationen angepaßt. In dieser Arbeit wurde mit dem Schalenterm (III.2.5) die Deformation minimaler Energie berechnet und das zugehörige innere Quadrupolmoment Q_0 mit dem aus experimentellen $B(E2)$ -Werten ¹⁶⁷⁾ verglichen. Diese Rechnung war zugleich ein Test für die Anwendbarkeit einer derartigen Schalenkorrektur. Vergleiche für etwa 50 Kerne mit Massenzahlen zwischen 100 und 250 ergeben

$$\alpha = 0.7 \pm 0.05.$$

Abb. 13 zeigt einen Vergleich experimenteller ¹⁶⁷⁾ und berechneter β -Deformationen im Grundzustand. Dabei ist das Minimum der potentiellen Energie mit der oben erwähnten, im symmetrischen Fall zweiparametrischen Kerngestalt berechnet und der β -Wert aus dem Ellipsoid gleicher Länge bestimmt worden. Die berechnete Gestalt minimaler Energie ist meist ein Ellipsoid, nur bei den Aktiniden und zwischen Tellur und Dysprosium gibt es geringe Abweichungen von der Ellipsoid-Gestalt, die aber merkliche Energieänderungen zur Folge haben.

Als Alternative zur Anpassung des Parameters α an Grundzustände von Kernen in der schwereren Hälfte des Periodensystems ist in Abb. 14 die Deformation an den invarianten Punkten der Potentialfläche als Funktion von α für U^{236} aufgetragen. Diese Deformationen kann man mit Ergebnissen der Strutinsky-Methode ^{64,67)} vergleichen, um so den besten Wert für α zu bestimmen. Auch in diesem Fall erhält man $\alpha = 0.7$.

Dieses Ergebnis ist besonders bemerkenswert, weil die Deformation α_2 des Grundzustandes von U^{236} monoton mit α wächst, die übrigen stationären Punkte aber eine gegenläufige

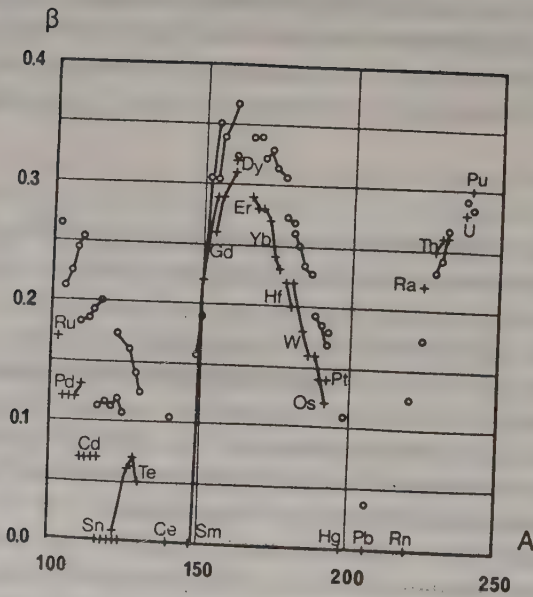


Abb.13. Experimentelle¹⁶⁷⁾ (o) und berechnete (+) Beta-Werte im Grundzustand als Funktion der Massenzahl A.

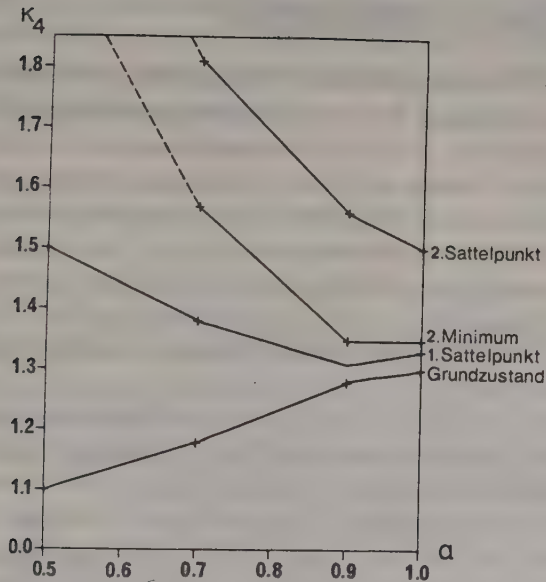


Abb.14. Deformation $\mathcal{K}_2$ an den stationären Punkten der Energiefläche gegen den Gewichtungsfaktor α von lokaler und globaler Krümmung. Gestrichelte Linien sind extrapoliert.

Tendenz haben. Das Intervall brauchbarer α -Werte ist deshalb sehr klein. Das gleiche gilt für die obige Anpassung an Quadrupolmomente, weil die Deformation des Grundzustandes nicht für alle Kerne mit α wächst. Obwohl beide Anpassungen sehr empfindlich sind, erhält man in beiden Fällen den gleichen Wert.

III.4 Mittelung der Hauptkrümmungen

In III.2 wurde zunächst offengelassen, welche Definition der lokalen Krümmung für einen krümmungsabhängigen Schalenterm zu bevorzugen ist. In der Differentialgeometrie sind für die Krümmung einer Fläche an einem bestimmten Punkt zwei verschiedene Begriffe üblich: Gaußsches Krümmungsmaß und mittlere Krümmung. Beide sind Mittelwerte $K(K_1, K_2)$ der beiden Hauptkrümmungen K_1 und K_2 , der Eigenwerte der aus dem ersten und zweiten Fundamentaltensor g_{ij} und L_{ij} gebildeten Matrix $((L_{ij})(g_{ij})^{-1})$ (vgl. z.B. ^{168,170}). Die Hauptkrümmungen selbst sind für die Schalenkorrektur (III.2.5) interessant, denn sie sind die Extrema der Krümmungen aller Normalschnitte durch diesen Flächenpunkt und bestimmen über den Eulerschen Satz ^{168,169} die Krümmung eines beliebigen Normalschnitts.

Die Gaußsche Krümmung, das Produkt der beiden Hauptkrümmungen, ist für die Schalenkorrektur nicht gut geeignet, weil sie z.B. für zylindrische Kerne verschwindet-- unabhängig von dem Radius des Zylinders im Gegensatz zur quantenmechanischen Schalenkorrektur eines solchen Kerns. (vgl. ¹⁷⁰).

Ein ähnliches geometrisches Argument spricht gegen die mittlere Krümmung $K = (K_1 + K_2)/2$. Wenn nämlich, wie während der Spaltung, die beiden Hauptkrümmungen sehr verschieden sind, so wird die kleinere von beiden Krümmungen vernachlässigbar, wenn man von negativen Krümmungen absieht. Das bedeutet bei rotationssymmetrischer Kerngestalt: Die Krümmung der Randkurve (des

Meridians) wird vernachlässigt gegenüber der des (dazu senkrechten) Parallelkreises. Diese Hauptkrümmungsrichtung ist sicher die weniger entscheidende. Sie mißt hauptsächlich die Rotationssymmetrie des Kerns, die andere aber seine Einschnürung. Nach bisherigen Rechnungen ist aber die Schalenenergie gegen Abweichungen von der Rotationssymmetrie weit weniger empfindlich als gegen Einschnürung^{106,131,134,171-173}). Aus diesen Gründen wird hier als lokale Krümmung an Stelle des arithmetischen Mittels der Hauptkrümmungen das der Hauptkrümmungsradien genommen, wodurch eher umgekehrt die Rotationssymmetrie vernachlässigt wird. D.h.

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) \quad (\text{III.4.1})$$

III.5 Schalenkorrektur bei negativer Krümmung

Bei stark eingeschnürten Kernen mit deutlich ausgebildetem Hals gibt es Punkte der Kernoberfläche, an denen die lokale Krümmung negativ wird. In diesem Fall ist zwar die globale Krümmung $\bar{K} = \int K \, dS / \int dS$, die in dem Ansatz (III.2.5) benutzt wird, immer noch positiv, doch kann der effektive Krümmungsradius R_{eff} (III.2.6) negativ werden. Dann wird es unmöglich, die Zuordnung (III.2.5) von Nukleonenzahlen in der Schalenfunktion $S(N,Z)$ sphärischer Kerne vorzunehmen. Deshalb wird in diesem Fall die effektive Oberflächenspannung σ_{eff} gleich ihrem Wert nach dem Tröpfchenmodell σ_{LDM} gesetzt, d.h. die Schalenenergie des entsprechenden Kernteils ganz vernachlässigt.

Im Zwei-Kugel-Modell treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Der Bereich negativer Krümmung entspricht dort der

Schnittkurve der beiden Cluster. Da dieses Gebiet vom Maß Null ist, kann es bei der Integration über die Oberfläche ignoriert werden.

Als globale Krümmung wird im Folgenden nur der Integralmittelwert von den Bereichen der Kernoberfläche verstanden, in denen die lokale Krümmung positiv ist. Wenn der Kern so weit eingeschnürt ist, daß ein Bereich negativer lokaler Krümmung die beiden Kernteile positiver Krümmung trennt, so wird die globale Krümmung für beide Cluster getrennt berechnet. Damit ist sichergestellt, daß diese globale Krümmung des Compoundkerns bei der Spaltung stetig in die der Fragmente übergeht.

IV Ergebnisse

In diesem vierten Teil werden die Ergebnisse für die allgemeine Form der Schalenkorrektur δE nach (III.2.5) für die Parametrisierung $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ aus III.1 angegeben. Die Schalenkorrektur und die potentielle Energie wurden für die Kerne Th^{232} , U^{236} , Pu^{242} , Cm^{244} , Cf^{250} und Fm^{254} bei symmetrischer Deformation (α_2, α_4) berechnet; für U^{236} wird außerdem der Einfluß asymmetrischer $(\alpha_3 \neq 0)$ Deformationen untersucht.

IV.1 Schalenkorrektur für symmetrische Deformationen (α_2, α_4)

Die Schalenkorrektur für den Compoundkern U^{236} ist in Abb. 15 als Funktion der beiden wichtigsten Freiheitsgrade α_2 und α_4 bei der symmetrischen Spaltung dargestellt. Die Koordinaten α_2 (Werlängerung) und α_4 (Einschnürung) sind dieselben wie in III.1; Beispiele für diese symmetrischen Kerngestalten sind in Abb. 10 angegeben.

Die Abszisse $(\alpha_4 = 0)$ in Abb. 15 entspricht Rotationsellipsoiden: von der Kugel im Koordinatenursprung $(\alpha_2=1, \alpha_4=0)$ bis zu einem dreimal so langen Ellipsoid $(\alpha_2=3, \alpha_4=0)$. Als Ordinate ist die Einschnürung des Kerns α_4 aufgetragen, nach oben werden diese Gestalten mehr und mehr eingeschnürt bis zu zwei sich berührenden Fragmenten $(\alpha_2 \text{ beliebig}, \alpha_4=1)$. Der Zerreißpunkt hat die Koordinaten $(\alpha_2=2.6, \alpha_4=1)$, der Weg minimaler Energie folgt in dieser Darstellung etwa einer Parabel vom Koordinatenursprung zum Zerreißpunkt.

In der Nähe des nach dem Tröpfchenmodell niedrigsten Weges zur Spaltung (Abb. 19) liegen drei Gebiete mit besonders niedriger Schalenenergie (Abb. 15): in der Nähe der Kugel $(\delta E = -6 \text{ MeV})$, am Sattelpunkt $(\delta E = -5 \text{ MeV})$ und am Zerreißpunkt $(\delta E = -5 \text{ MeV})$. Diese drei lokalen Minima der Schalenenergie bestimmen

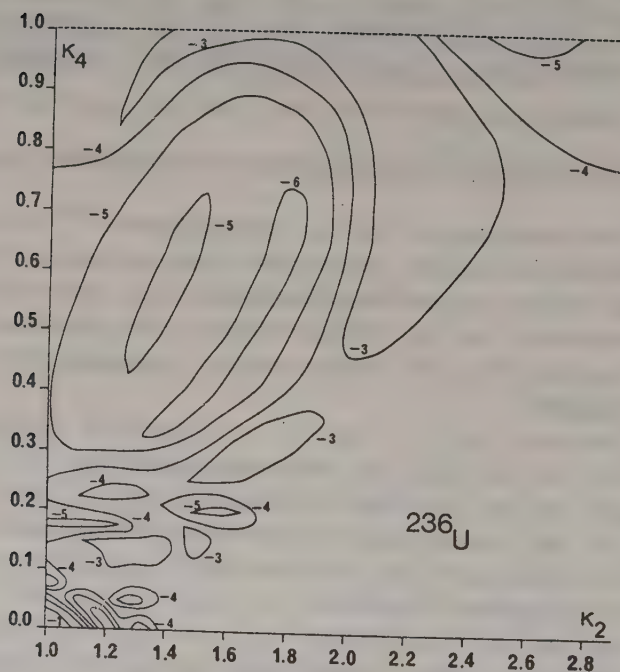


Abb.15. Deformationsabhängigkeit der Schalenkorrektur δE von ^{236}U für symmetrische Deformationen. Für den sphärischen Kern ist $\delta E(1,0,0)=0$ gesetzt.

in dieser Reihenfolge den Grundzustand, das dem Spaltisomer entsprechende zweite Minimum und den Zerreißpunkt. Die übrigen lokalen Minima der Schalenenergie liegen in Gebieten, in denen die Tröpfchenmodell-Energiefläche sehr steil ist und treten deshalb in der Gesamtenergie nicht als Minima in Erscheinung.

In Abb. 16 und Abb. 17 ist die Neutronenzahl N angegeben, die der maximalen bzw. minimalen effektiven Krümmung der Kernoberfläche nach der Relation (III.2.6) zugeordnet ist. Diese Neutronenzahlen sind die Grenzen des Intervalls, in dem der Integrand $S(N(R), Z(R))$ in (III.2.5) integriert wird. Der Vergleich mit der Schalenkorrektur δE in Abb. 15 zeigt, daß man hier qualitativ ähnliche Verhältnisse hat wie im einfachen Zwei-Kugel-Modell. (Teil II). Sekundärschalen (besonders niedrige Schalenenergien) treten nach Abb. 15, 16 und 17 bei solchen Deformationen auf, bei denen die Schalenfunktion $S(N, Z)$ in (III.2.5) zwischen magischen Grenzen (mit extrem niedrigen Energiewerten) integriert wird. So entsteht das dem Grundzustand ($\delta E \approx -6$ MeV) entsprechende Energieminimum bei $Z_{\max} \approx 126^{+)}$ ($N_{\max} \approx 200$) und $Z_{\min} \approx 82$ ($N_{\min} \approx 126$), das zweite Minimum bei $Z_{\max} \approx 126$, $N_{\min} \approx 126$, $Z_{\min} \approx 82$. Am Zerreißpunkt ist die minimale Protonenzahl $Z_{\min} \approx 82$, die minimale Neutronenzahl $N_{\min} \approx 126$.

+) Die richtige magische Zahl ist $Z=114^{174)}$, aber die beiden Parameter der Schalenfunktion $S(N, Z)$ sind von Myers und Swiatecki^{41,42)} unter der Annahme, $Z=126$ sei magisch, angepaßt worden.

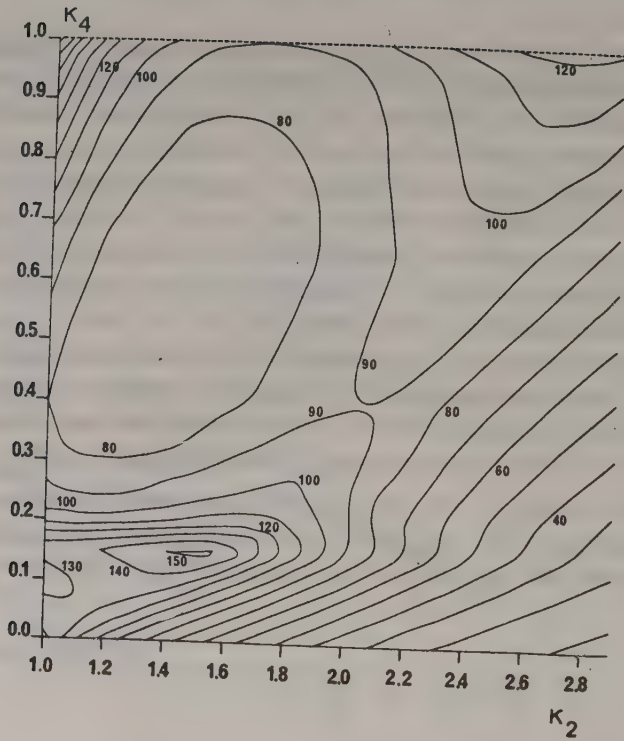


Abb.16. Die der maximalen effektiven Krümmung der Kernoberfläche nach (III.2.6) zugeordnete Neutronenzahl $N(R)$.

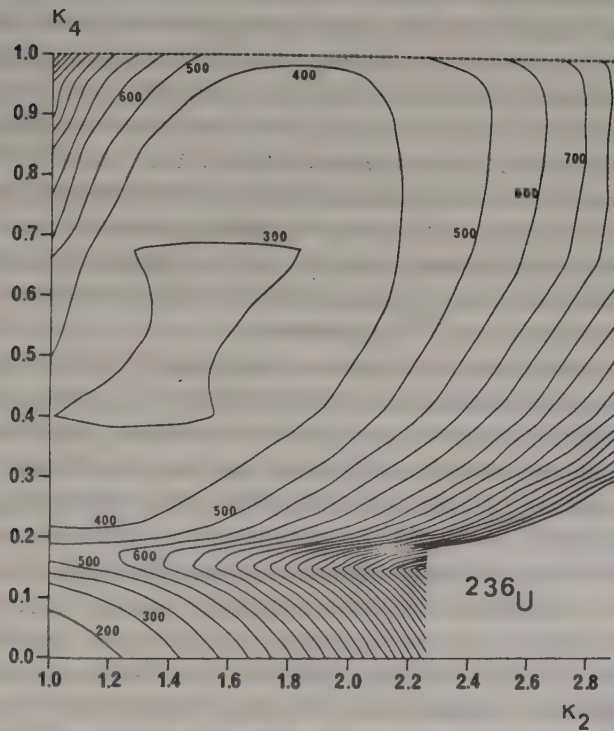


Abb.17. Die der minimalen effektiven Krümmung der Kernoberfläche nach (III.2.6) zugeordnete Neutronenzahl $N(R)$.

IV.2 Vergleich mit Schalenkorrekturen nach der Strutinsky-Methode

Schalenkorrekturen lassen sich kaum direkt mit experimentellen Daten vergleichen. Da Experimente Informationen über die gesamte potentielle Energie bieten, kann man daraus Aussagen über die Schalenenergie allein nur dann gewinnen, wenn sich in den experimentellen Daten Fluktuationen um einen überlagerten glatten Verlauf von diesem trennen lassen. Das ist z.B. für Kernmassen als Funktion von Neutronenzahl N und Protonenzahl Z möglich: Man kann die Differenz zwischen experimentellem und Tröpfchenmodell-Wert eines Kerns mit seiner Schalenkorrektur vergleichen. Für die hier untersuchte Schalenkorrektur ist das in einer früheren Arbeit¹⁶⁶⁾ geschehen.

Leider läßt sich ein ähnlicher Vergleich für die Schalenenergie eines stark deformierten Kerns nicht durchführen. Die potentielle Energie ist nur für den Grundzustand gemessen, aber an den anderen wichtigen Punkten der Energiefläche (Sattelpunkte, zweites Minimum und Spaltpunkt) nur bei wenigen Aktiniden bekannt.

Die meisten experimentellen Sattelpunktenergien wurden bestimmt, als Sekundärminima noch unbekannt waren, d.h. ihnen liegt die (falsche) Annahme zugrunde, die Deformationsenergie von Aktiniden bei der Spaltung habe nur einen Sattelpunkt. Es gibt bis heute nur wenige Daten über die Gestalt der "doppelhöckrigen" Spaltbarrieren (z.B. von Bjørnholm et al.^{66,177)}). Oft kann man nur die höhere von beiden experimentell untersuchen, und es bleibt ungewiß, ob das die erste oder die zweite Barriere ist. Auch die Anregungsenergie des zweiten Minimums ist nur für wenige Aktiniden bekannt^{67,177)} und wegen der unsicheren Nullpunktenergie nicht mit der berechneten Differenz der potentiellen Energie vergleichbar.

Deshalb bleibt als Vergleich oft nur die Voraussage theo-

tischer Schalenkorrekturen, die nach der Strutinsky-Methode berechnet worden sind. Dabei gibt es zwei Schwierigkeiten. Die Strutinsky-Korrekturen hängen vom jeweiligen Einteilchenpotential ab, alle Schalenkorrekturen außerdem von der Parametrisierung der Kerngestalt (s.III.1). Quantitativ vergleichbar sind deshalb nur Energien an invarianten Punkten der Energiefläche (s.IV.5 und IV.6), qualitativ auch solche von geometrisch ähnlichen Kerngestalten.

In Abb. 18 sind als vergleichbare Deformationen solche mit gleicher Kernlänge auf dem Weg minimaler Energie in der jeweiligen Parametrisierung angenommen. Die obere Kurve zeigt die Schalenkorrektur (III.2.5) auf einem Weg der α_2 - α_4 -Ebene, der vom sphärischen Kern über Grundzustand, ersten Sattelpunkt, Sekundärminimum, zweiten Sattelpunkt zum Zerreißpunkt dem Gradienten der Energiefläche folgt. Die zweite Kurve von Nilsson et al.⁶⁷⁾ entspricht der Projektion der zu festem bezüglich ϵ_4 minimalen potentiellen Energie auf die ϵ -Achse der ϵ - ϵ_4 -Ebene. Die beiden unteren Kurven sind von Strutinsky für α_2 -Deformationen berechnet⁶⁴⁾.

Der Deformationsparameter ist hier die Kernlänge in Einheiten von $2R_c$. Für die obere Kurve ist das gleich dem α_2 -Wert

$$z_0/R_c = \alpha_2, \quad (\text{IV.2.1})$$

für die anderen Kurven ist die Kernlänge die des Ellipsoids mit gleichem ϵ -Wert. Der entsprechende Bohrsche β -Wert¹⁵⁵⁾ ist nach Newton¹³⁴⁾ (IV.2.2) und Arseniev et al.¹³⁵⁾ (IV.2.3) bestimmt:

$$\beta(\epsilon) = \frac{1.0569 \epsilon}{1 - 1/3 \epsilon} \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\epsilon(\beta) = \frac{3/2 \sqrt{5/4} \beta}{1 + 1/2 \sqrt{5/4} \beta} \quad (\text{IV.2.3})$$

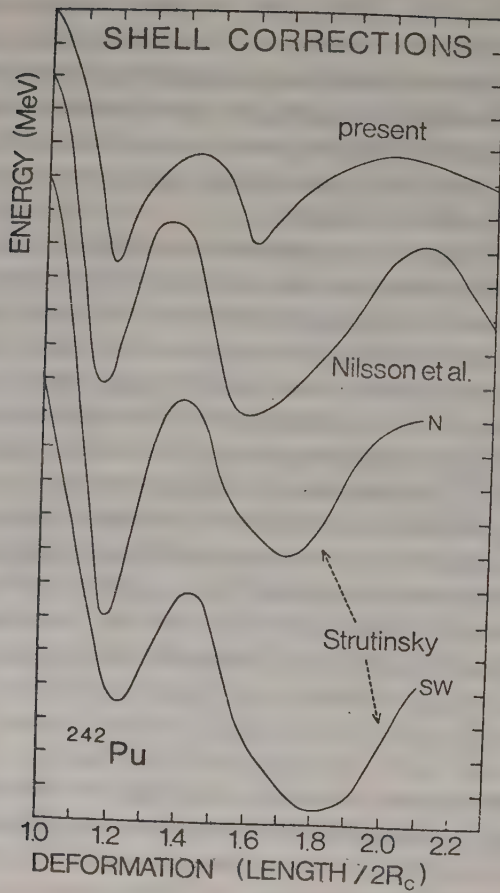


Abb.18. Schalenkorrektur δE ("present") von ²⁴²Pu im Vergleich zu solchen nach der Strutinsky-Methode von Nilsson et al.⁶⁷⁾ und Strutinsky⁶⁴⁾ (N Nilsson-Niveaus, SW Saxon-Woods-Niveaus).

$$\varepsilon(\beta) \approx 0.95 \beta (1 - 0.32 \beta) \quad (\text{IV.2.4})$$

Für die beiden unteren Kurven ist ε nach Strutinskys Relation $\eta = 15.7 \varepsilon^{64})$ umgerechnet worden^{*)}.

Man sieht, daß die Deformationen im Grundzustand, an den beiden Sattelpunkten und im zweiten Minimum qualitativ gut übereinstimmen. Mit zunehmender Deformation weichen die Kurven allerdings etwas voneinander ab. Dies liegt zum Teil an der unzureichenden Parametrisierung (z.B. nur α_2 für die beiden unteren Kurven). Insgesamt hat die obere, semi-empirische Kurve ähnlichen Verlauf und ihre Schwankungen gleiche Größenordnung wie die nach der Strutinsky-Methode berechneten. Ein Vergleich von Energien an invarianten Punkten wird in IV.5 und IV.6 durchgeführt.

Die beiden unteren Kurven sind ein gutes Beispiel dafür, inwieweit die Strutinsky-Korrektur vom jeweiligen Einteilchen-Potential abhängt. Die Deformationen sind in beiden Fällen gleich, die obere Kurve ist mit Nilsson-Niveaus berechnet, die untere mit Niveaus aus Störungsrechnungen für ein Saxon-Woods-Potential.

IV.3 Fläche der potentiellen Energie für U^{236} und Pu^{242}

Abb. 19 zeigt die Tröpfchenmodell-Energie von U^{236} für alle Kerndeformationen bis zur dreifachen Kernlänge (rechter Bildrand) und von ellipsoidförmigen Gestalten (unterer Bildrand) bis zu zwei sich berührenden Fragmenten mit variabler

^{*)} Dieser η -Wert stimmt mit dem üblichen nach Szymański¹⁷⁸⁾ nicht überein ($\eta \approx 20\varepsilon$ - je nach Stärke der Spin-Bahn-Kopplung); das gleiche gilt für Strutinskys β und das übliche Bohrsche β ¹⁵⁵⁾.

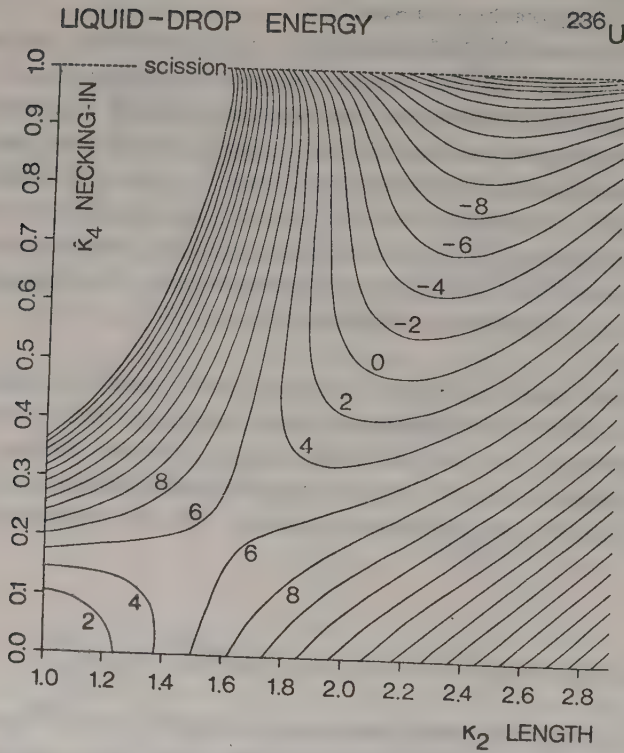


Abb.19. Deformationsenergie $E(\kappa_2, \kappa_4) - E(\kappa_2, \kappa_4)$ ohne Schalenkorrektur für ^{236}U .

Länge (oberer Bildrand). Dabei ist die Energie so normiert, daß dem Koordinatenursprung (sphärischer Kern) die Energie 0 zugeordnet ist, d.h. nur die Energie der Deformation ist dargestellt.

Die zugrundeliegende Massenformel stimmt im wesentlichen mit der von Myers und Swiatecki^{42,43)} überein (vgl.^{166,170,176)}). Diese Massenformel besteht aus Volumen-, Oberflächen-, Coulomb- und Paarterm. Der Symmetrieterm ist in zwei Teile aufgespalten, die zu Volumen und Oberfläche proportional sind. Wegen der hier angenommenen Inkompressibilität der Kernmaterie bleibt das Kernvolumen während der Spaltung konstant. Deshalb ist die Volumenenergie und der zum Volumen proportionale Teil des Symmetrieterms in der Deformationsenergie nicht enthalten. Das gilt auch für die Paarenergie in der Form von Green und Edwards¹⁴⁾ und Wapstra¹⁷⁹⁾:

$$\delta = \begin{cases} 11 \text{ MeV}/A^{1/2} & \text{für uu-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -11 \text{ MeV}/A^{1/2} & \text{für gg-Kerne} \end{cases} \quad (\text{IV.3.1})$$

Der Einfachheit halber wird in dieser Arbeit die Paarenergie als konstant angenommen - im Gegensatz zu der von Stepién und Szymanski¹⁸⁰⁾ vermuteten Gestaltabhängigkeit der Paarenergie, die in letzter Zeit vor allem von Nilsson et al.⁶⁷⁾, Cameron⁴⁵⁾, Griffin¹⁸¹⁾ und Seeger⁵⁸⁾ diskutiert wurde. Nach Griffin¹⁸¹⁾ wirkt die Paarenergie dämpfend auf die Schalenstruktur, für ihre Gestaltabhängigkeit wäre nach⁶⁷⁾ eine Proportionalität zur Oberfläche oder eine geeignete Potenz davon besser geeignet. Bis jetzt hat sich allerdings für die Kernspaltung eine einheitliche Behandlung des Gap-Parameters G nicht durchgesetzt, und einige der Diskrepanzen in den Barrierenhöhen und Anregungsenergien der Spaltisomere beim Vergleich

verschiedener Autoren sind sicher auch durch die Paarenergie verursacht (vgl. IV.6).

Ohne Paarenergie und unnormiert hat die Tröpfchenmodellenergie hier die folgende Form:

$$E = a_2(1 - \kappa((N-Z)/A)^2)A^{2/3} \frac{|S|}{4\pi R_C^2} + E_C - \frac{\pi^2}{2} \frac{e^2}{r_C} \frac{d^2}{r_C} \frac{z^2}{A} \quad (IV.3.2)$$

$$4\pi\sigma^2 \int_0^{z_0} dz \, \rho^2(z) \cdot \int_{-\frac{z_0}{2}}^{+\frac{z_0}{2}} d\gamma \, s^2(z\gamma) \int_0^\pi \frac{\sin^2\phi \, d\phi}{|z(y-1) + (z^2(y-1)^2 + s^2(z) + s^2(z\gamma) - 2s(z)s(z\gamma)\cos\phi)^{1/2}} \quad (IV.3.2)$$

mit $y = z_A/z$.

Die Coulomb-Energie (nach Lawrence¹⁶¹⁾) und die Kernoberfläche $|S|$ wurden numerisch durch Romberg-Integration¹⁸²⁾ berechnet. Der dritte Summand, eine Korrektur für den Abfall der Ladungsdichte an der (diffusen) Kernoberfläche, geht auf Myers und Swiatecki⁴⁰⁾ zurück.

Als Parameterwerte sind die der zweiten Anpassung von Myers und Swiatecki^{42,43)} übernommen:

$$a_2 = 17.9439 \text{ MeV}$$

$$\kappa = 1.7826$$

$$r_c = 1.2249 \text{ fm}$$

Der Wert für den Kernradius-Parameter $r_c = R_c A^{-1/3}$ liegt im Vergleich mit den Stanforder Elektronenstreuexperimenten¹⁰⁰⁻¹⁰²⁾ um etwa 10% zu hoch. Trotzdem wurde dieser Wert hier übernommen, denn er ergibt die beste Übereinstimmung mit experimentellen Kernmassen und die günstigsten Tröpfchenmodell-Spaltbarrieren^{40,41)}.

Durch Addition der Schalenenergie (Abb. 15) zur Tröpfchenmodell-Energie der Abb. 19 erhält man die vollständige Energiefläche des Compoundkerns U^{236} für alle symmetrischen Deformationen bis zur dreifachen Länge des Ladungsradius. In Abb. 20

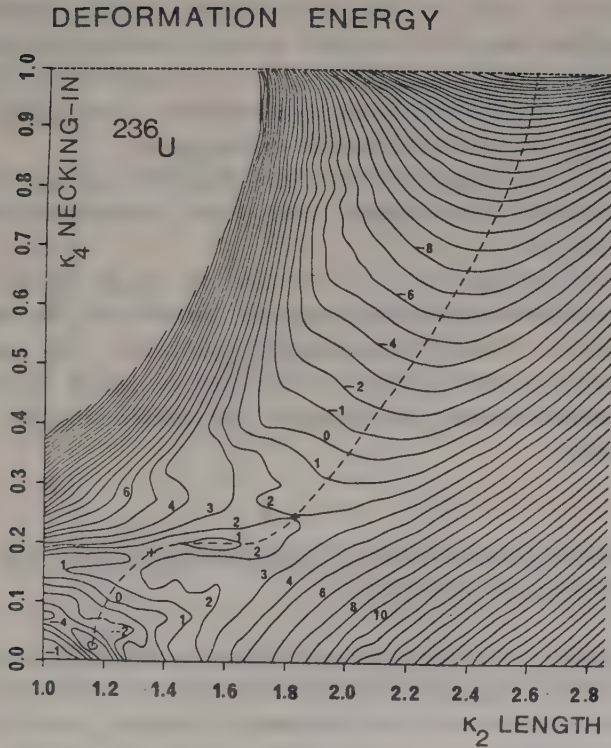


Abb.20. Deformationsenergie $E(x_2, x_4)$ von ^{236}U für $x_3=0$. Deformationen sind die der Abb.10, die gestrichelte Linie verbindet Grundzustand und Zerreißpunkt auf dem Weg minimaler Energie (in dieser Parametrisierung).

ist die Energie der Deformation allein angegeben - unabhängig von der Bindungsenergie des Kerns. Die Energieskala ist 1 MeV, die Schrittbreite für das Tabellieren der Energie 0.025 in beiden Koordinaten. Die Höhenlinien sind durch lineare Interpolation zwischen je zwei der 3321 Gitterpunkte erzeugt worden.

In der gleichen Weise ist in Abb. 21 die Deformationsenergie von Pu^{242} dargestellt. Um Computerzeit zu sparen, wurde die Energie nur in den für die Spaltung interessanten Bereichen zwischen Grundzustand und Zerreißpunkt berechnet.

In diesen Darstellungen ist der "niedrigste" Weg vom Grundzustand zum Spaltpunkt eingetragen (über seine Invarianzeigenschaften vgl. III.1).

Wie ein Vergleich von Abb. 19 und Abb. 20 zeigt, weicht der niedrigste Weg nach dem Tröpfchenmodell erheblich von dem der Gesamtenergie ab: Das Tröpfchenmodell begünstigt bis zum Sattelpunkt schwach eingeschnürte und relativ zu lange Kerngestalten und führt zwischen Sattelpunkt und Spaltpunkt zum umgekehrten Effekt.

IV.4 Deformations-, Tröpfchenmodell-, und Schalenenergie auf dem niedrigsten Weg zur Spaltung

Der "niedrigste" Weg zur Spaltung hängt nach III.1 von der jeweiligen Parametrisierung der Kernoberfläche ab. Verschiedene Parameterdarstellungen haben Wege minimaler Energie, die bei Parametertransformationen u.U. nicht genau ineinander übergehen. Wenn diese Abweichungen gering sind (bei vernünftigen Parametrisierungen), bekommt dieser Begriff eine anschauliche Bedeutung, die in der Diskussion der potentiellen Energie bei der Kernspaltung fast immer implizit benutzt wird.

Die Kerndeformationen während der Spaltung definieren als Funktion der Zeit eine Kurve im Raum der Gestaltparameter.

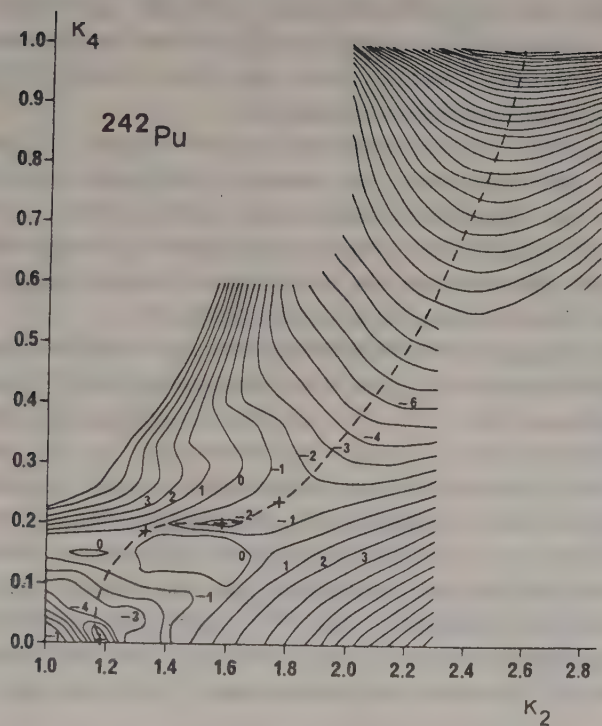


Abb.21. Deformationsenergie $E(\kappa_2, \kappa_4)$ von ^{242}Pu für $\kappa_3=0$. Deformationen sind die der Abb.10, die gestrichelte Linie verbindet Grundzustand und Zerreißpunkt auf dem Weg minimaler Energie (in dieser Parametrisierung).

Falls die Anregungsenergie des Compoundkerns niedrig genug und die Zähigkeit der Kernmaterie groß ist, kann man erwarten, daß die Spaltung ein quasistatischer Vorgang ist und dann der dynamische Weg in der Nähe des statisch niedrigsten verläuft. Dann kann man, wie es gegenwärtig in der Regel geschieht, die wichtigsten Informationen über den Verlauf des Spaltprozesses aus der potentiellen Energie allein gewinnen, ohne das (ungelöste) dynamische Problem zu behandeln.

Außerdem hat der Spaltweg zwei weitere Vorteile: Die Darstellung ist eindimensional und deshalb graphisch übersichtlicher, und es ist einfacher, Ergebnisse verschiedener Parametrisierungen nur längs dieses Weges miteinander zu vergleichen, weil hier eine Reihenfolge der invarianten Punkte festliegt, die in allen Parametrisierungen übereinstimmt.

Abb. 22 zeigt (von oben nach unten) die Tröpfchenmodellenergie, die Gesamtenergie und die Schalenkorrektur längs dieses Spaltweges für U^{236} . Der Deformationsparameter ist das innere Quadrupolmoment Q_0 längs des Weges (für $Q_0(\alpha_2, \alpha_4)$ s. Abb. 11). Tröpfchenmodell- und Gesamtenergie sind am Koordinatenursprung auf Null normiert, Die Schalenenergie ist der Deutlichkeit halber um 10 MeV nach unten verschoben. Man sieht, daß die beiden Minima der Schalenenergie die lokale Struktur der Gesamtenergie bestimmen. Bei U^{236} liegt das zweite Minimum der Schalenenergie gerade am Tröpfchenmodell-Sattelpunkt und erzeugt dort ein Minimum der Gesamtenergie von etwa gleicher Tiefe.

Bei den schwereren Aktiniden ist dieses zweite Minimum der Schalenenergie zu größeren Deformationen hin verschoben und fällt dann mit dem steilen Abfall der Tröpfchenmodell-Energie zusammen. Das hat zur Folge, daß in der Gesamtenergie von Cr^{250} und Fm^{254} das zweite Minimum ganz verschwindet (vgl. IV.6).

Im Mittel liegt die Schalenenergie bei $\delta E \approx -4$ MeV und führt deshalb zu einer niedrigeren Deformationsenergie als das

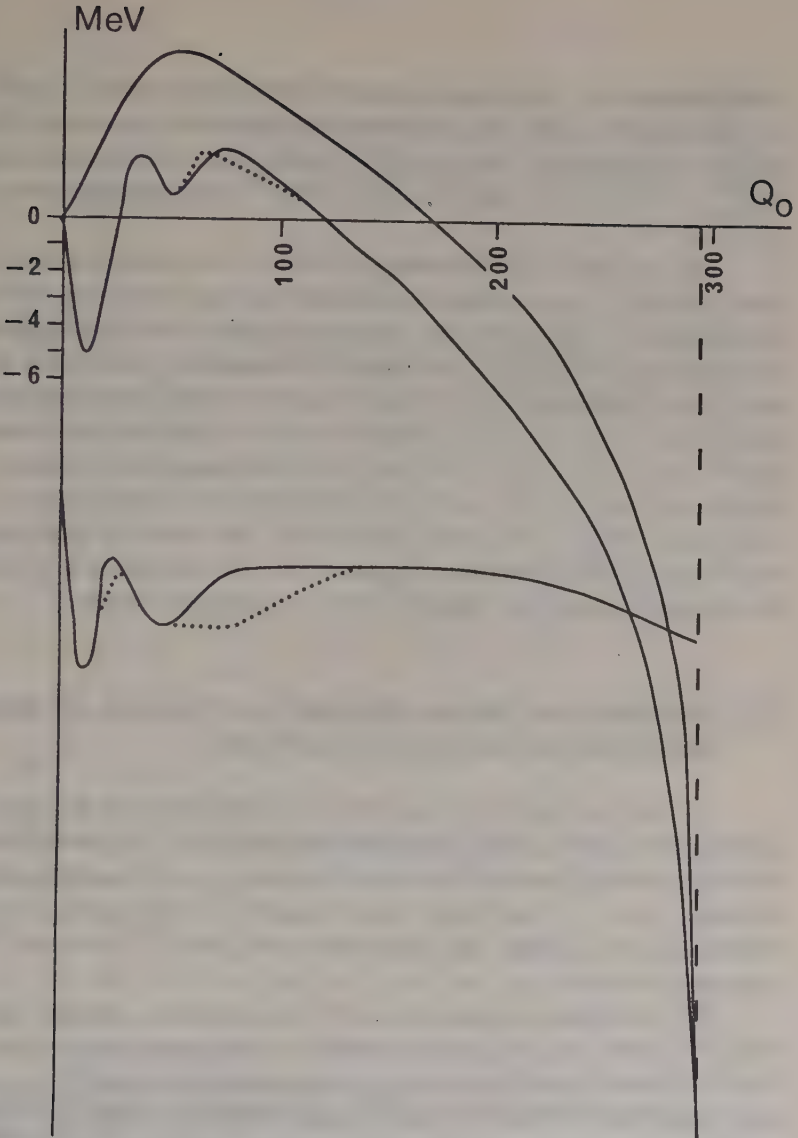


Abb.22. Tröpfchen-Modell-Energie (obere Kurve), Gesamtenergie (mittlere Kurve) und Schalenkorrektur (untere Kurve) für ^{236}U als Funktion des inneren Quadrupolmomentes Q_0 auf dem niedrigsten Weg zur Spaltung für symmetrische (ausgezogen) und asymmetrische Deformation (gepunktet).

Tröpfchenmodell. Die Spaltbarriere wird jedoch von 6.2 auf 7.6 MeV erhöht, weil der Grundzustand stärker erniedrigt wird als der Sattelpunkt. Das gilt für alle untersuchten Aktiniden (Th^{232} , U^{236} , Pu^{242} , Cm^{244} , Cf^{250} , Fm^{254}) mit Ausnahme von Th^{232} .

Von der zweiten Barriere an bleibt die Schalenkorrektur fast konstant bis zu einer Einschnürung des Kerns von 80%. Am Zerreißpunkt liegt noch ein drittes Minimum der Schalenenergie von etwa 2.5 MeV Tiefe. Das scheint im wesentlichen eine geometrische Zufälligkeit der hier benutzten Gestaltparameter zu sein. (vgl. Abb. 23): Die Kerngestalten in der Nähe des Spaltweges haben von $\mathcal{X}_4=0.3$ bis $\mathcal{X}_4=0.8$ etwa konstante mittlere Krümmung, die zu 70% die Schalenkorrektur bestimmt. Eine flexiblere Parametrisierung würde nach der zweiten Barriere niedrigere Schalenenergien ergeben. Im Zusammenhang mit der Massenasymmetrie soll darauf näher eingegangen werden.

IV.5 Spaltbarrieren einiger Aktiniden im Vergleich mit Experimenten und mit der Strutinsky-Methode

In Abb. 24 sind die potentiellen Energien der Minima und Sattelpunkte der sechs Aktiniden dargestellt. Zum Vergleich sind die verfügbaren experimentellen Daten und Ergebnisse von Nilsson et al.⁶⁷⁾ und Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ angegeben. Die Meßergebnisse stammen von Bjørnholm und Lynn¹⁷⁷⁾ sind in¹³²⁾ zusammengestellt.

Mit Meßwerten vergleichbar ist die jeweils höhere Barriere, denn sie bestimmt die experimentelle Anregungsenergie (bis auf Tunneleffekte), bei der der Spaltquerschnitt wesentlich zunimmt. Als Daten von Nilsson et al.⁶⁷⁾ und Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ sind ebenfalls die Höhen der jeweils höheren Barriere aufgetragen.

Die obere Kurve zeigt die Höhe des Tröpfchenmodell-Sattel-

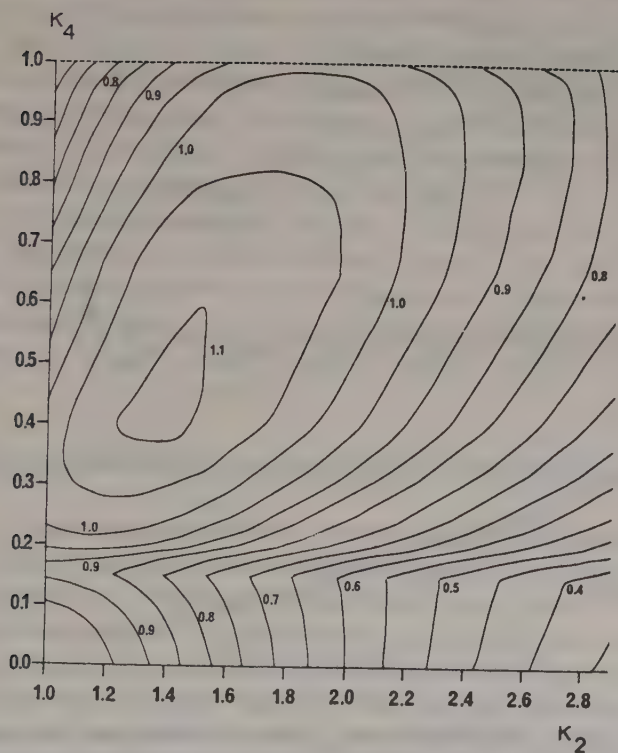


Abb.23. Mittlere Krümmung $\oint K \, dS / \oint dS$ als Funktion der Deformation (κ_2, κ_4).

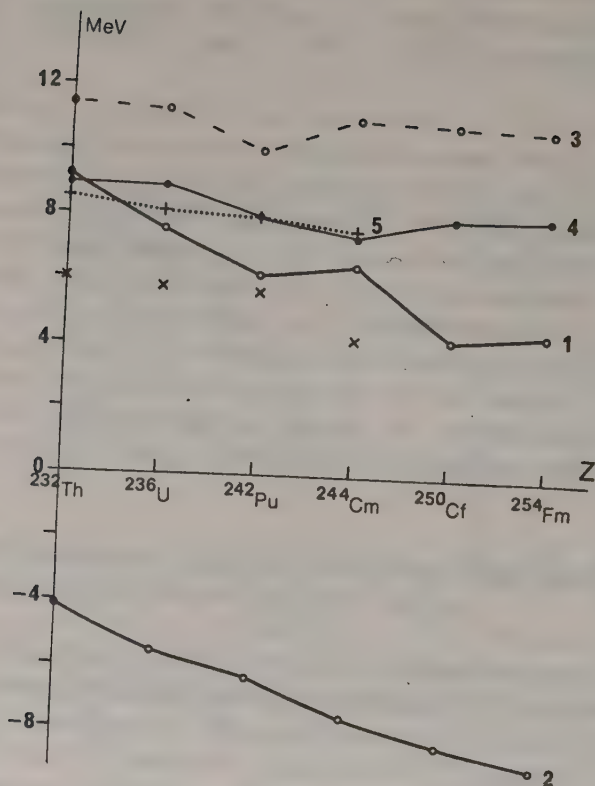


Abb. 24. Höhe der Spaltbarrieren (Kurve 1) über dem Grundzustand und nach Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ (5) und Nilsson et al.⁶⁷⁾ (4). Experimentelle Werte nach Bjørnholm und Lynn¹⁷⁷⁾ (x). Bei doppelten Spaltbarrieren ist die höhere angegeben. Deformationsenergie im Grundzustand (2) und Spaltbarrieren ohne Schalenkorrektur (3).

punktes über dem Grundzustand. Dabei fällt die Energie von Pu^{242} etwas heraus, weil der Spaltparameter $x \sim Z^2/A$ ungewöhnlich niedrig ist ($Z^2/A = 36.3$). Wie man sieht, sind die Tröpfchenmodell-Werte etwa doppelt so hoch wie die experimentellen Barrieren. Diese Diskrepanz kann man erheblich verkleinern, indem man die Höhe der Tröpfchenmodell-Barriere auf den (sphärischen) Grundzustand der Weizsäcker-Massenformel bezieht (Swiatecki⁵⁾ 1958), also die Schaleneffekte im Grundzustand (untere Kurve) eliminiert. Dann weicht allerdings der Grundzustand bei Aktiniden um einige MeV vom experimentellen ab. Außerdem fallen diese Barrieren mit zunehmendem Spaltparameter - verglichen mit Meßwerten - zu steil ab^{42,43}).

Die Schalenkorrektur (III.2.5) verbessert die Spaltbarrieren gegenüber dem Tröpfchenmodell wesentlich, die Ergebnisse sind von der gleichen Größenordnung wie solche nach der Strutinsky-Methode - für die vier vergleichbaren Kerne sogar besser.

IV.6 Anregungsenergie und Tiefe der Sekundärminima

Vergleichsmöglichkeiten für die Anregungsenergie des Sekundärminimums sind sehr begrenzt, weil bis jetzt nur wenige experimentelle Daten darüber zur Verfügung stehen^{132,177,183}). Deshalb werden hier vor allem die Ergebnisse zum Vergleich herangezogen, die nach der Strutinsky-Methode bei unterschiedlichen Voraussetzungen über das Einteilchen-Potential erzielt worden sind. Da diese Daten je nach den angenommenen Deformationen und Potentialen schon untereinander streuen, kann man nur prüfen, ob der Schalenterm (III.2.5) Ergebnisse liefert, die der Größenordnung nach richtig sind und das Verhalten richtig wiedergibt, das allen Strutinsky-Ergebnissen gemeinsam ist.

In Abb. 25 und Abb. 26 sind die Deformationen des sphäri-

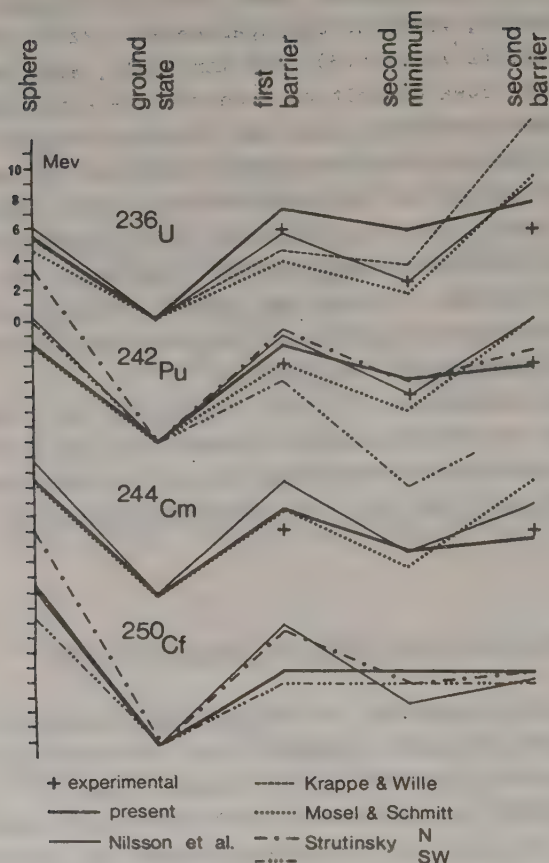


Abb.25. Energie an den stationären Punkten der Energiefläche von ^{236}U , ^{242}Pu , ^{244}Cm , ^{250}Cf bezogen auf den Grundzustand, die Deformation ist willkürlich. Theoretische Werte nach Strutinsky⁶⁴⁾, Nilsson et al.⁶⁷⁾, Krappe und Wille¹¹¹⁾, Mosel und Schmitt¹²⁶⁾. Experimentelle Werte nach^{132,177,183)}.

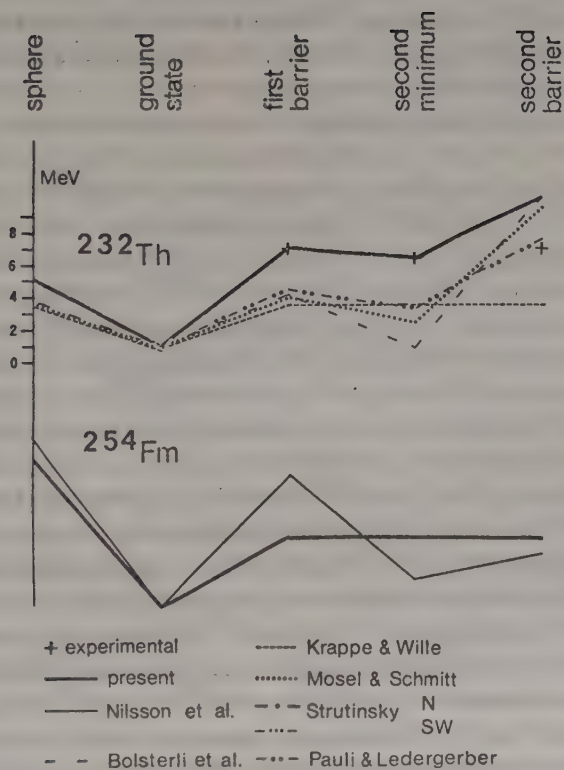


Abb.26. wie Abb.25 für die Kerne ^{232}Th und ^{254}Fm . Theoretische Werte wie in Abb.25 und Bolsterli et al.¹²⁹⁾, Pauli und Ledergerber¹³²⁾.

schen Kerns, des Grundzustandes, des Spaltisomers und an den beiden Sattelpunkten der Energiefläche unabhängig von den unterschiedlichen Parametrisierungen äquidistant aufgetragen. Die Energiewerte an diesen Punkten sind durch Strecken verbunden. Auf diese Weise kann man die relativen Energien der interessierenden Punkte besser vergleichen.

Die Vergleichswerte in Abb. 25 und Abb. 26 haben Nilsson et al.⁶⁷⁾ für ϵ - und ϵ_4 -Deformationen mit Nilsson-Niveauschema berechnet, ähnlich auch Krappe und Wille¹¹¹⁾, Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ für zwei Ellipsoide mit einer Kurve vierter Ordnung als Hals und zwei Oszillator-Potentialen mit $\vec{l}s$ - und l^2 -Term. Andersen, Dickmann und Dietrich¹⁸⁴⁾ benutzen zwei Ellipsoide mit hyperbolischem Hals und Oszillator-Potentialen mit aus dem Nilsson-Potential verallgemeinerten Spin-Bahn- und l^2 -Term, Bolsterli, Fiset, Nix und Norton¹²⁹⁾ die gleiche Kerngestalt aber ein Woods-Saxon-ähnliches Einteilchen-Potential, das durch Faltung eines Yukawa-Potentials mit der (homogenen) Dichte entsteht. Strutinsky⁶⁴⁾ hat für α_2 -Deformationen sowohl mit Nilsson- als auch mit Woods-Saxon-Potential gerechnet. Seine Rechnungen für Pu^{242} (s. Abb. 25) zeigen, daß die Ergebnisse der Strutinsky-Methode von dem verwendeten Einteilchen-Potential abhängen können: Das zweite Minimum ist mit Woods-Saxon-Potential um 7 MeV tiefer als mit Nilsson-Potential.

Bei den schwersten Aktiniden, Cf^{250} und Fm^{254} , liegt das zweite Minimum der Schalenenergie schon so weit jenseits des Tröpfchenmodell-Sattelpunktes, daß es im steilen Abfall der Deformationsenergie zum Spalt punkt hin nicht mehr ausgebildet ist. In diesem Fall ist in Abb. 25 und 26 beiden Sattelpunkten und den Sekundärminima die gleiche Energie zugeordnet.

Außer den erwähnten Diskrepanzen, die auf Unterschiede im Einteilchen-Potential und in der Parametrisierung zurückgehen, gibt es bei einigen der in Abb. 25 und 26 benutzten Vergleichswerten Fehler, die durch mangelhafte Näherungen in den einzel-

nen Rechnungen verursacht sind. So steigt bei Nilsson et al.⁶⁷⁾ die Energie bei großer Deformation zu stark an, weil in der Volumenerhaltungsbedingung nicht alle Terme des Potentials eingeschlossen sind. Strutinsky⁶⁴⁾ benutzt für die Tröpfchenmodell-Energie einen auf Swiatecki⁵⁾ zurückgehenden Ausdruck in Potenzen von α_2 , in dem für große Deformationen die höheren Potenzen dominieren und eine scheinbare α_4 -Instabilität erzeugen.

Ein auffälliger Unterschied zwischen den verschiedenen Rechnungen ist die Existenz von Sekundärminima bei den einzelnen Kernen. So gibt es nach den Rechnungen dieser Arbeit Spaltisomere nur bis zu Cm^{244} . Bei Cf^{250} verschwindet das zweite Minimum aus den oben genannten Gründen. Das stimmt mit Strutinskys⁶⁴⁾ Rechnungen für Woods-Saxon-Potential überein, nicht aber für Nilsson-Potential und nicht für das mit der Dichte gefaltete Yukawa-Potential von Bolsterli, Fiset, Nix und Norton¹²⁹⁾.

Ähnliche Abweichungen sieht man bei den relativen Höhen der ersten und zweiten Barriere. Ab Pu^{242} ist die erste Barriere niedriger als die zweite in Übereinstimmung mit Strutinsky. Nach Nilsson et al. ist das erst ab Cm^{244} der Fall, nach Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ erst bei Nobelium ($Z = 102$).

Bis Cm^{244} liegen alle angegebenen zweiten Barrieren erheblich über dem experimentellen Wert. Wenn man asymmetrische Deformationen zuläßt, wird dies gemildert, doch bleibt die erste Barriere und das zweite Minimum davon unbeeinflusst (vgl. IV.8).

Zum Vergleich der Anregungsenergien im Sekundärminimum sind bei zwei der Kerne experimentelle Werte verfügbar: 2.4 MeV für U^{236} nach Björnholm und Strutinsky⁶⁶⁾ aus dem Abstand von Resonanzen im (n,f) -Wirkungsquerschnitt und 2.2 MeV für Pu^{242} nach Back et al.¹⁸³⁾. In beiden Fällen liegen die mit der Schalenkorrektur (III.2.5) berechneten Minima zu hoch, was bei

Pu^{242} auf die etwas geringe Amplitude der Schalenkorrektur (vgl. Abb. 18) zurückgeführt werden kann. Für U^{236} fehlen Angaben über vergleichbare Schalenkorrekturen.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Spaltbarrieren dieser Arbeit stimmen mit Experimenten besser überein als die nach der Strutinsky-Methode, die zweiten Minima scheinen schwächer ausgeprägt zu sein und (soweit man aus zwei Vergleichswerten schließen kann) eher zu hoch zu liegen. Außer bei Th^{232} weicht keiner der Energiewerte völlig vom mittleren Verhalten mehrerer vergleichbarer Resultate nach der Strutinsky-Methode ab.

IV.7 Symmetrische Deformation minimaler Energie

In IV.6 wurde die Energie an den invarianten Punkten der Energiefläche unabhängig von der Deformation des Kerns im Vergleich zu Experimenten und zur Strutinsky-Methode untersucht. In diesem Abschnitt soll die Deformation des Kerns während der Spaltung betrachtet werden. Asymmetrische Deformationen bleiben dabei unberücksichtigt (vgl. IV.8), weil viele vergleichbare Rechnungen diesen Freiheitsgrad nicht enthalten.

Im Unterschied zu den Energiewerten an den stationären Punkten der Potentialfläche, die aus Messungen der Kernmassen, der Spaltbarrieren und für einige Kerne auch der Anregungsenergie des zweiten Minimums bekannt sind, gibt es, abgesehen vom Grundzustand, keine experimentelle Information über die Deformation des Kerns an diesen Punkten. Der einzige Meßwert ist bis jetzt das Trägheitsmoment zum zweiten Minimum von Pu^{240} (s. 185).

Auch der Vergleich mit anderen theoretischen Ergebnissen ist schwierig, weil unterschiedliche Parametrisierungen der Kerngestalt nicht quantitativ vergleichbar sind. Es fehlt hier eine einheitliche Skala wie für die Deformationsenergien. Man kann nur einige Tendenzen über die relative Lage der stationären Punkte im Parametergebiet diskutieren, deren Abhängigkeit von Masse und Ladung in vielen Rechnungen einheitlich ist.

Schon lange bekannt ist¹⁹⁾, daß der Tröpfchenmodell-Sattelpunkt bei den schweren Aktiniden bei geringeren Deformationen liegt als bei leichten, weil die (abfallende) Coulomb-Energie in stärkerem Maße anwächst (mit Z^2) als die (ansteigende) Oberflächenenergie ($\sim A^{2/3}$). Dieser Effekt ist unabhängig von der Parametrisierung und tritt auch in Abb. 27 auf: Beide Deformationen, Länge α_2 und Einschnürung α_4 nehmen für den Tröpfchenmodell-Sattelpunkt mit wachsender Kernmasse ab.

Der Grundzustand der hier untersuchten Aktiniden liegt bei einer relativen Kernlänge von $\alpha_2=1.15$ bis $\alpha_2=1.19$ mit einem schwachen Maximum bei Cm^{244} . Die Einschnürung α_4 ist in allen Fällen sehr gering (etwa 0.025 bei Th^{232} und U^{238} , sonst 0), d.h. alle sechs Kerne sind im Grundzustand praktisch ellipsoidförmig. Die Tendenz zu geringerer Einschnürung bei schweren Aktiniden ist gegensätzlich zu den von Nilsson et al.^{6,7)} berechneten ϵ_4 -Werten, die erst für Fm^{254} negativ sind (d.h. Einschnürung), von Th^{232} bis Cm^{244} aber positiv. Das bedeutet: Die Quadrupolmomente haben etwa gleiche Tendenz, die E_4 -Momente aber gegenläufige. Möglicherweise ist dieser Effekt durch die hier verwendete Parametrisierung bedingt, die nur die für die Spaltung wichtigen Freiheitsgrade berücksichtigt, aber für Grundzustandsdeformationen zu wenig Freiheitsgrade hat. So können nur Ellipsoide ($\epsilon_4=0$) und eingeschnürte Gestalten ($\epsilon_4 < 0$) beschrieben werden, aber nicht solche, die positiven ϵ_4 -Werten entsprechen.

Das zweite Minimum der Deformationsenergie verschiebt sich bei den schwereren Kernen zu größeren Deformationen hin. Das gilt sowohl für die Kernlänge α_2 als auch für die Einschnürung α_4 bis zu Cm^{244} . Bei diesem Kern fällt das Sekundärminimum mit dem Tröpfchenmodell-Sattelpunkt zusammen. Bei den schwereren Kernen Cf^{250} und Fm^{254} tritt die Sekundärschale erst bei Deformationen auf, die größer als die des Tröpfchenmodell-Sattelpunktes sind. Dort wird durch die Tröpfchenmodell-Energie die zweite Barriere der Schalenenergie unter das zweite Minimum abgesenkt, und deshalb verschwindet das zweite Minimum ganz. In Rechnungen einiger Autoren^{67,126,129,132)} verschwindet das

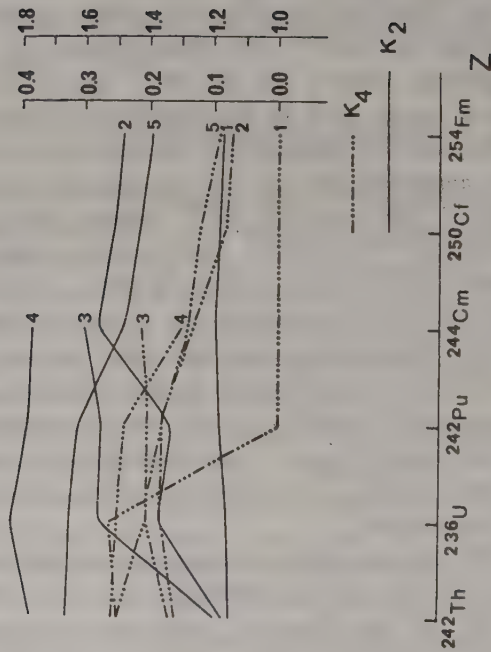


Abb. 27. Deformation (x_0, x_4) an den stationären Punkten der Energiefläche für ^{242}Th , ^{236}U , ^{242}Pu , ^{244}Cm , ^{250}Cf und ^{254}Fm (Grundzustand (1), 1. Sattelpunkt (2), Sekundärminimum (3), 2. Sattelpunkt (4) und Sattelpunkt ohne Schalenkorrektur (5)).

zweite Minimum erst bei noch schwereren Kernen, doch sind die Ergebnisse hier nicht einheitlich⁶⁴⁾.

In allen Fällen liegt das zweite Minimum bei deutlich eingeschnürten Kerngestalten. Das entspricht den Ergebnissen der meisten Arbeiten^{67,120,124,127,129,131)} nach der Strutinsky-Methode und widerspricht dem von Mosel und Schmitt¹²⁶⁾ für ein Zwei-Zentren-Oszillator-Modell berechneten minimalen Weg zur Spaltung, auf dem erst nach dem zweiten Minimum Einschnürungen auftreten.

Die Deformation des ersten Sattelpunktes steigt nach Länge und Einschnürung von Th^{232} bis U^{236} und Pu^{242} und fällt dann monoton. Dieses Verhalten ist ähnlich wie beim zweiten Minimum durch die Lage in der Energiefläche relativ zum Tröpfchenmodell-Sattelpunkt bestimmt. Bei leichten Aktiniden fällt der erste Sattelpunkt zwischen Grundzustand und Tröpfchenmodell-Sattelpunkt, kommt bei Cm^{244} diesem nahe und liegt bei schwereren dahinter. In den Koordinaten der Abb. 27 zeigt sich das darin, daß ab Cm^{244} beide Sattelpunktskoordinaten in der Nähe der Tröpfchenmodell-Koordinaten und zu diesen parallel verlaufen. Die Schalenkorrektur verschiebt dann den Tröpfchenmodell-Sattelpunkt zu etwas größeren Deformationen hin.

Im Gegensatz zu den anderen stationären Punkten der Energiefläche tritt der zweite Sattelpunkt bei etwa konstanter Kernlänge ($\alpha_2=1.8$) auf. Das ist in auffallender Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Tsang und Nilsson¹¹⁵⁾, die für alle hier betrachteten Kerne zu einem ϵ_2 -Wert von 0.86 kommen.

In der vorliegenden Arbeit ist der zweite Sattelpunkt instabil gegen asymmetrische Deformationen (vgl. IV.10). Der tatsächliche Sattelpunkt von U^{236} ohne die Nebenbedingung $\alpha_4=0$ liegt bei $\alpha_2=1.67$. Da in der genannten Arbeit¹¹⁵⁾ nur symmetrische Deformationen zugelassen sind, liegt die Vermutung nahe, daß auch dort diese feste Kernlänge am zweiten Sattelpunkt nur durch die Beschränkung auf symmetrische Deformationen bedingt ist.

IV.8 Massenasymmetrie und asymmetrische Deformation auf dem Spaltweg

Auch bei niedrigen Anregungsenergien ist es ungeklärt, wie weit man aus der potentiellen Energie allein auf den Ablauf der Spaltung schließen kann. Insbesondere kann man nicht abschätzen, wie sehr das Massenverhältnis der Spaltfragmente dadurch beeinflußt wird, daß die potentielle Energie des Kerns bei asymmetrischen (im einfachsten Fall Oktupol- (P_3 -)) Deformationen niedriger ist als bei symmetrischer Kerngestalt. Das hängt auch davon ab, wie groß die Zähigkeit der Kernmaterie ist. Bei großer Zähigkeit kann man vermuten, daß die Spaltung weitgehend gedämpft in der Nähe des minimalen Weges zur Spaltung abläuft und durch die Statik im wesentlichen bestimmt ist. In klassischen Modell-Rechnungen zur Dynamik der Spaltung^{2,85, 136,153-155,186-192}) ist der andere Grenzfall untersucht worden: Die Zähigkeit wurde ganz vernachlässigt. Die resultierenden dynamischen Wege oszillieren dann stark um den energetisch minimalen. Ob einer der beiden Grenzfälle der realistischen Situation nahekommt, wird man besser sehen, wenn zuverlässigere Werte für die Zähigkeit der Kernmaterie bekannt sind. Modell-Rechnungen dazu sind von Schirmer¹⁶⁴⁾ durchgeführt worden.

Trotz dieser Einschränkung ist es nicht plausibel, daß asymmetrische Spaltung bei einigen Aktiniden viel wahrscheinlicher ist als symmetrische, ohne daß diese energetisch günstiger wäre. Deshalb bestand ein großer Teil der theoretischen Bemühungen bei der Kernspaltung darin, nach möglichen Effekten zu suchen, die eine Instabilität der potentiellen Energie gegen Oktupol-Deformationen zur Folge hätten. Nach jahrzehntelangen Mißerfolgen ist in den letzten Jahren durch die Schalenkorrekturmethode in der Kernspaltung ein Fortschritt in dieser Richtung gelungen.

IV.9 Asymmetrie (α_3) in verschiedenen Phasen der Spaltung von U^{236}

Abb. 28 zeigt die Deformationsenergie von U^{236} unter Berücksichtigung des asymmetrischen Freiheitsgrades α_3 . Zu jedem Gitterpunkt (α_2, α_4) ist die Energie angegeben, die bezüglich α_3 bei festem α_2 und α_4 minimal ist. In Abb. 29 ist die der minimalen Energie entsprechende asymmetrische Deformation α_3 als Funktion von Länge α_2 und Einschnürung α_4 dargestellt.

Die Rechnungen für Abb. 28 erfordern wegen des neuen Freiheitsgrades α_3 ein Vielfaches der Rechenzeit für das entsprechende Energiegebirge bei symmetrischer Deformation ($\alpha_2, \alpha_3=0, \alpha_4$), denn an Stelle eines Energiewertes an jedem Gitterpunkt (α_2, α_4) ist jetzt die bezüglich α_3 minimale Energie zu suchen, also die Energie in einem α_3 -Intervall zu minimalisieren. Deshalb ist wegen der begrenzten Computerzeit nur der Compoundkern U^{236} für alle drei Freiheitsgrade $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ untersucht worden, für die anderen Aktiniden wurden nur Energien zu symmetrischen Deformationen berechnet. Wie die Ergebnisse für U^{236} zeigen, ändert sich das Energiegebirge nur wenig, wenn man auf die Nebenbedingung $\alpha_3=0$ verzichtet.

In Abb. 28 und 29 ist der Kern auf dem "minimalen" Weg zwischen Grundzustand und erstem Sattelpunkt asymmetrisch deformiert. Diese Deformation verschwindet wieder am Sattelpunkt und im zweiten Minimum. Erst am zweiten Sattelpunkt ist die Kerngestalt wieder asymmetrisch.

Das Auftreten von asymmetrischen Deformationen zwischen Grundzustand und erstem Sattelpunkt kann durch die hier verwendete Parametrisierung verursacht sein. Bei einer Transformation der Gestaltparameter würde sich unter Umständen ein anderer minimaler Weg ergeben. Aber die Asymmetrie (bzw. Symmetrie) α_3

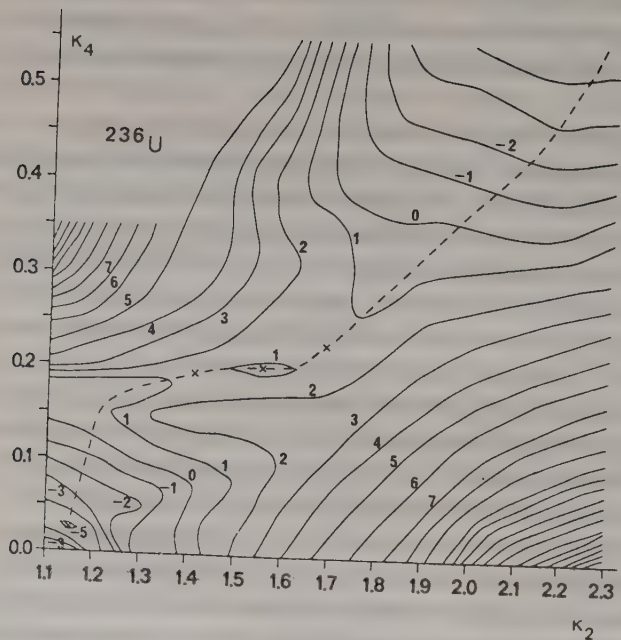


Abb.28. Deformationsenergie $E(\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ von ^{236}U . Dargestellt ist die bezüglich der Asymmetrie κ_3 bei jeweils festem κ_2 und κ_4 minimale Energie.

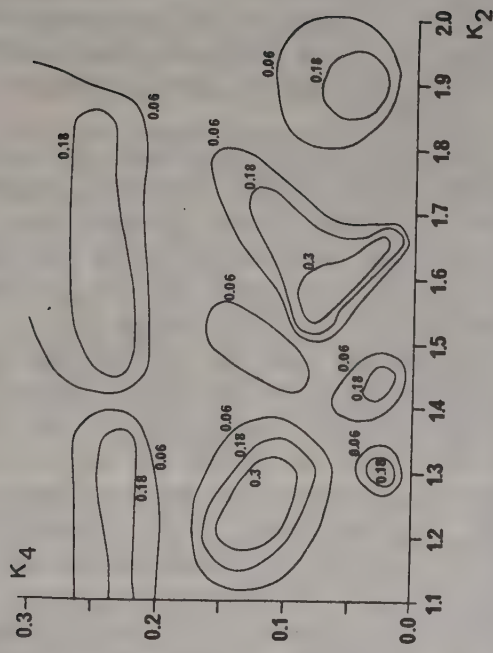


Abb. 29. Asymmetrische Deformation $x_3(x_2, x_4)$ minimaler potentieller Energie.

der Kerngestalt an stationären Punkten der Energiefläche stimmt mit den Ergebnissen der Rechnungen von Nilsson et al.⁶⁷⁾, Pashkhevich¹²⁷⁾, Pauli, Ledergerber und Brack¹³¹⁾ nach der Strutinsky-Methode überein und wurde schon in II.8 für das Zwei-Kugel-Modell beschrieben.

Die Energiedifferenz von 0.4 MeV ist hier allerdings kleiner als bei den meisten Rechnungen nach der Strutinsky-Methode. Sie könnte durch die wenig flexible Asymmetrie-Deformation der vorliegenden Parametrisierung verursacht sein (vgl. IV.10 und IV.11).

Nach dem zweiten Sattelpunkt verschwindet die asymmetrische Deformation allmählich wieder, und der Spaltspunkt stimmt mit dem des symmetrischen Gebirges (Abb. 19) überein. Dieses Verhalten, das im Gegensatz zu dem des einfachen Zwei-Kugel-Modells steht, wird durch die hier benutzte Parametrisierung verursacht, die in IV.10 gezeigt wird.

Wichtig ist, daß auf dem Wege zum Zerreißpunkt asymmetrische Kernfeformationen am zweiten Sattelpunkt energetisch günstiger sind als symmetrische. Da bei U^{236} der zweite Sattelpunkt der höhere von beiden ist und bei niedriger Anregungsenergie aus energetischen Gründen einen Engpaß für die Spaltung bildet, bestimmt dieser in der adiabatischen Beschreibung sehr stark die spätere Aufteilung der Massen auf die Fragmente. Deshalb ist die Instabilität des zweiten Sattelpunktes gegen asymmetrische Deformation ein wesentlicher Fortschritt gegenüber den vergeblichen Bemühungen im Rahmen des Tröpfchenmodells. Denn einer der schwerwiegenden Mängel des Spaltungsmodells von Bohr und Wheeler²⁾ bestand darin, die symmetrische Spaltung gegenüber der asymmetrischen zu begünstigen, obwohl sie experimentell einen viel geringeren Wirkungsquerschnitt hat.

IV.10 Oktupoldeformation am zweiten Sattelpunkt

Es ist umstritten, inwieweit die asymmetrische Verteilung der Fragmentmassen schon durch die potentielle Energie am Sattelpunkt bestimmt ist. Das ist in dem Maße fraglich wie die adiabatische Beschreibung (Rainwater¹⁹⁴), Bohr¹⁵⁵, Hill und Wheeler⁸⁵, Bohr und Mottelson¹⁹³) der Kernspaltung überhaupt. Da aber die Kollektivbewegung des Kerns in der Nähe des Sattelpunktes wegen der dort sehr geringen verfügbaren Energie am langsamsten verläuft, müßte eine adiabatische Beschreibung dort am ehesten angemessen sein⁴). Danach wäre die potentielle Energie gerade dort von besonders großem Einfluß auf den Ablauf der Spaltung, und selbst geringe Erniedrigungen der Barriere durch den asymmetrischen Freiheitsgrad müßten sich in der Massenverteilung zeigen. Andernfalls, wenn die potentielle Energie am Sattelpunkt symmetrische Spaltung begünstigt, dann ist die adiabatische Beschreibung der Kernspaltung selbst in Frage gestellt, und es hat keinen Sinn, Potentialgebirge zu studieren. Deshalb ist gerade die Kerngestalt an Sattelpunkten ein wichtiger Test jeder Schalenkorrektur.

Bisher ist ein gemeinsames Ergebnis der meisten Rechnungen nach der Strutinsky-Methode die eine asymmetrische Deformation berücksichtigen^{67,111,113,127,129,131}), daß der zweite Sattelpunkt instabil gegenüber diesem Freiheitsgrad ist. (Ausnahme: Möller et al.¹⁰⁹). Der tatsächliche zweite Sattelpunkt entspricht einer asymmetrischen Kerngestalt, in der weit verbreiteten Parametrisierung durch Legendre-Polynome einer Oktupoldeformation P_3 . Das wird auch durch die vorliegende Rechnung bestätigt (s. Abb. 33).

Der asymmetrische Freiheitsgrad verschiebt außerdem den (scheinbaren) symmetrischen zweiten Sattelpunkt zu etwas kürzeren Deformationen.

IV.11 Fragmentpaar minimaler Energie

In IV.9 wurde darauf hingewiesen, daß asymmetrische Deformationen zwischen dem zweiten Sattelpunkt und dem Zerreißpunkt im vorliegenden Modell allmählich verschwinden. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß dieser Effekt durch die Parametrisierung bedingt ist. In einer flexibleren Parametrisierung bleibt die Asymmetrie am Zerreißpunkt erhalten.

Die hier verwendete Schar von Kerngestalten erzeugt bei realistischer Kernlänge (etwa $2.5 R_0$) eine sehr lange Halsregion am Zerreißpunkt (Abb. 30). Das führt zu einem sehr großen Bereich negativer Krümmung, der für die Schalenkorrektur nach III.5 vernachlässigt wird. Außerdem ist die Fragmentgestalt minimaler Tröpfchenmodell-Energie in dieser Parametrisierung nicht enthalten. Nach Wilets⁴⁾ und Trepulka¹⁵⁹⁾ besteht diese aus zwei sich berührenden birnenförmigen Fragmenten (Abb. 31) mit einem verschwindenden Bereich negativer Krümmung.

Diese Fragmentgestalt kann nur mit mehr Freiheitsgraden erzeugt werden, als die hier verwendete Parametrisierung zuläßt. Das zeigt sich auch in der sehr hohen Tröpfchenmodell-Energie am Zerreißpunkt (-30 MeV, s. Abb. 20). In der Parametrisierung (III.1.3-6) folgt aus Masse A_H und Deformation (z.B. β_H) des einen Fragments schon Masse A_L und Deformation β_L des anderen. Die Fragmentdeformationen sind nicht unabhängig voneinander variierbar, was z.B. zur Berechnung der kinetischen Energie und der Deformationsenergien der Fragmente notwendig wäre. Man müßte mindestens einen weiteren Parameter am Spalt punkt berücksichtigen, weil hier außer den Freiheitsgraden des Compoundkerns noch die der einzelnen Fragmente wichtig sind. Die notwendigen Freiheitsgrade dieser Konfiguration wären dann: Gesamtlänge $\mathcal{R}_2$ und Asymmetrie $\mathcal{R}_3$ (Massenverhältnis) des Compoundkerns und mindestens ein Deformationsfreiheitsgrad (β) für jedes Fragment (die Einschnürung $\mathcal{R}_4$ des Compoundkerns entfällt).

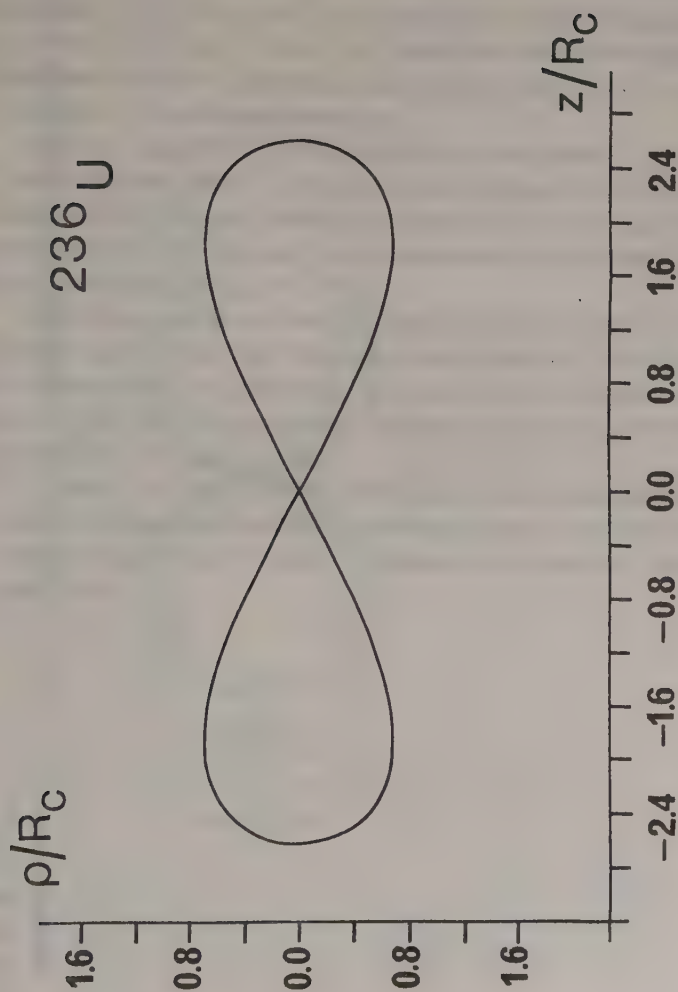


Abb. 30. Kerngestalt von ^{236}U am Zerreißpunkt in der Parametrisierung (x_2, x_3, x_4) .

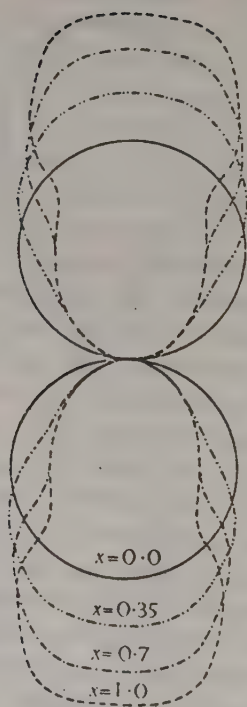


Abb. 31. Fragmentgestalten minimaler Energie für verschiedene Spaltparameter x ohne Skalenerkennung nach Willets⁴⁾.

Eine weit verbreitete Parametrisierung, die diese Bedingungen erfüllt, besteht aus zwei sich berührenden coaxialen Rotationsellipsoiden^{52,55,80,90,148,152-154}). Diese Fragmentgestalt hat nach Vergleichsrechnungen für einige Massenverhältnisse ($A_H = 156, 144, 130, 118$) bei fester Gesamtlänge $\varrho e_2 = 2.64$ (d.h. $z_0 = 20.0$ fm) eine deutlich günstigere Energie bei asymmetrischer Spaltung. Die Ergebnisse sind in Tab. 4 und in Abb. 32 zusammengestellt.

Wie unrealistisch die drei Gestaltparameter ($\varrho e_2, \varrho e_3, \varrho e_4$) am Zerreißpunkt sind, sieht man auch daran, daß die potentielle Energie der beiden Ellipsoide minimaler Energie um 26.6 MeV niedriger ist als die der entsprechenden dreiparametrigen Spaltzentrum-Konfiguration.

Wenn man genügend Freiheitsgrade berücksichtigt, ist eine Massenasymmetrie in der Nähe der experimentell wahrscheinlichsten energetisch am günstigsten. Das schwere Fragment $A_H=130$, $Z_H=50$, $N_H=80$ ist fast doppelt magisch und liegt am Rande des experimentellen Massenpeaks.

In Abb. 33 sind die Deformationen des Compoundkerns U^{236} an den stationären Punkten der Energiefläche und die Gestalt der sich berührenden primären Fragmente minimaler Energie dargestellt.

A_H	Z_H	N_H	A_L	Z_L	N_L	β_H	β_L	$E_{Def.} (MeV)$	$z_H (fm)$	$z_L (fm)$	$(z_H - z_L) / R_C$
156	60	96	80	32	48	1.15	0.5	-1770.7	12.8	7.1	0.75
144	56	88	92	36	56	0.9	0.9	-1771.7	10.8	9.2	0.22
130	50	80	106	42	64	1.1	0.6	-1776.0	11.7	8.3	0.46
118	46	72	118	46	72	0.9	0.9	-1774.5	10.0	10.0	0.00

Tab. 4. Potentielle Energie $E_{Def.}$ zweier koaxialer Rotationsellipsoide als Zerreißpunkt-Konfiguration von ^{236}U . A_H, Z_H, N_H, β_H und z_H sind Massen-, Protonen-, Neutronenzahl, Deformationsparameter und große Halbachse des schweren Fragments A_L, Z_L, N_L, β_L und z_L die entsprechenden Größen für das leichte Fragment.

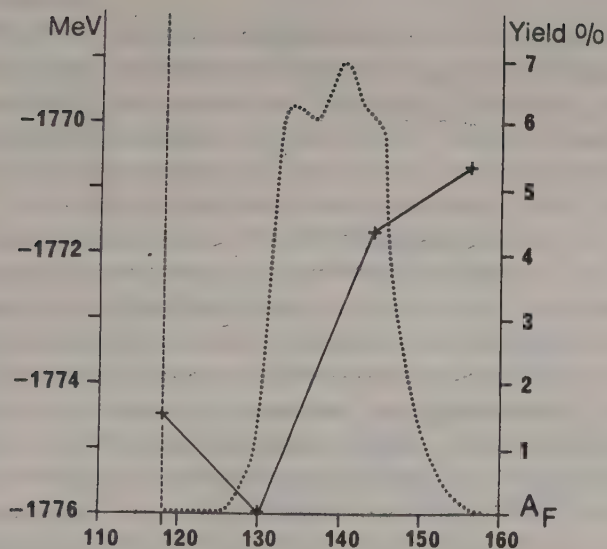


Abb.32. Potentielle Energie von ^{236}U am Zerreißpunkt (Gesamtlänge $2.64 \cdot 2R_C$) als Funktion der Masse A_H des schweren Fragments. Zum Vergleich die experimentelle Massenausbeute nach Schmitt et al.^{151).}

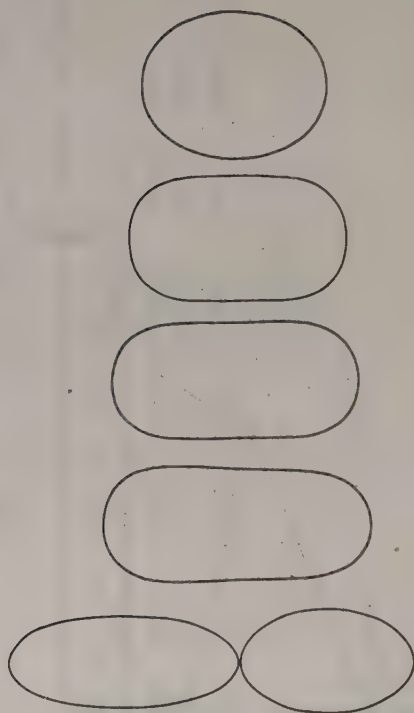


Abb.33. Berechnete Deformation von ^{236}U im Grundzustand, am ersten Sattelpunkt, im Sekundärminimum, am zweiten Sattelpunkt und am Zerreißpunkt (von oben nach unten).

V Schalenkorrektur und Niveaudichte an der Fermi-Kante

Nach den vorliegenden Ergebnissen ist die Schalenkorrektur (III.2.5) mit der nach der Strutinsky-Methode erzeugten vergleichbar. Damit ist eine Alternative zu dieser Methode gefunden, die wegen ihrer Unabhängigkeit von speziellen Einteilchen-Potentialen mehrere Vorteile bietet:

(1) Die Rechenzeit ist um Größenordnungen geringer und hängt nur wenig von der Deformation ab.

(2) Die Schalenkorrektur eines Kerns kann leicht aus der expliziten Formel (III.2.5) für beliebige Kerndeformationen berechnet werden.

(3) Für die Untersuchung hypothetischer Kerne sind die Unsicherheiten der (geschätzten) Parameter des Einteilchenpotentials vermeidbar; Extrapolationen sind zuverlässiger, denn sie werden (bei gegebenen magischen Zahlen) mit den drei festen Parametern in (III.2.5) gemacht, die im ganzen Periodensystem gelten.

Beide Verfahren haben ähnliche Ergebnisse, obwohl die Annahmen (I) und (II) für die Schalenkorrektur in II.3 von denen der Strutinsky-Methode verschieden sind. In beiden Methoden ist die Schwankung der Niveaudichte an der Fermi-Energie zwischen hoher Niveaudichte in der Schalenmitte und niedriger bei abgeschlossenen Schalen wesentlich. In beiden spielen die unteren Niveaus der abgeschlossenen Schalen keine Rolle. Die Niveauverteilungen selbst sind unterschiedlich: In der Strutinsky-Methode hängen sie vom jeweiligen Einteilchen-Potential ab, in der vorliegenden Arbeit sind die Niveaus eines freien Fermi-Gases durch Lücken bei magischen Zahlen und Verschiebungen zwischen diesen so gebündelt, daß Schalen entstehen. Sekundärschalen und das entsprechende Minimum der Schalenkorrektur treten bei Kerndeformationen mit niedriger Niveaudichte in der Nähe der Fermi-Kante auf.

Die magischen Zahlen der Sekundärschale hängen in der

Strutinsky-Methode vom jeweiligen Potential und von der Deformation ab. Bei dem Ansatz II.3 sind die magischen Zahlen als deformationsunabhängig angenommen (die des Grundzustandes), nur die Fermi-Grenzenergie der beiden Cluster hängt von der Deformation ab.

Nach der Strutinsky-Methode wird die mittlere Niveaudichte durch Ausschmieren der vorgegebenen Einteilchen-Niveaus erzeugt. Im Gegensatz dazu ist in der Schalenkorrektur II.3 die **m i t t l e r e** Niveaudichte durch die eines freien Fermi-Gases in einem Kasten vorgegeben. In dieser Niveaudichte ist das Pauli-Prinzip nach II.3 durch eine partielle Besetzung der Niveaus beider Cluster berücksichtigt, die durch die besondere Geometrie des Modells nahegelegt ist und so nicht allgemein definiert werden kann. Zwar ist dieser Faktor nur schwach gestaltabhängig und für die Ausbildung von Sekundärschalen vernachlässigbar, doch sollten die Folgen des Pauli-Prinzips im Verlauf der Kernspaltung in einer allgemeineren Form untersucht werden.

Es ist in der vorliegenden Arbeit gezeigt worden, daß die übliche Erzeugung einer mittleren Niveaudichte durch Faltung der realistischen Einteilchen-Niveaus mit Gauß-Funktionen nicht die einzige Möglichkeit ist, eine Schalenkorrektur für die Kernspaltung zu erhalten. Man kann schon mit sehr schematischen Annahmen über die Niveaudichten (wie die Bündelung von Niveaus eines Fermi-Gases) zu ähnlichen Ergebnissen kommen wie nach der Strutinsky-Methode.

Literatur

- 1) O.Hahn und F.Strassmann, Naturwiss. 27(1939)11
- 2) N.Bohr und J.A.Wheeler, Phys.Rev. 56(1939)426
- 3) C.F.v.Weizsäcker, Z.Physik 96(1935)431
- 4) L.Wilets, Theories of Nuclear Fission (Clarendon Press, Oxford, 1964)
- 5) W.J.Swiatecki, Proceedings of the Second International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958 (United Nations, New York, 1958), Paper P/651
- 6) I.Halpern und E.M.Henley, Comm.Nucl.Part.Phys. 3(1969)52
- 7) V.M.Adamov, L.V.Drapchinskii, S.S.Kovalenko, K.A.Petrzhak und I.I.Tyutyugin, Soviet Physics JETP 10(1970)416
- 8) M.Néve de Mévernies, Revue de Questions Scientifiques 2(1967)201
- 9) H.A.Bethe, Revs.Mod.Phys. 8(1936)81
- 10) H.A.Bethe und R.F.Bacher, Revs.Mod.Phys. 8(1936)165
- 11) E.P.Wigner, Phys.Rev. 51(1937)106
- 12) E.P.Wigner, Phys.Rev. 51(1937)947
- 13) A.G.W.Cameron, Can.J.Phys. 35(1957)1021
- 14) A.E.S.Green und D.F.Edwards, Phys.Rev. 91(1953)46
- 15) R.D.Present und J.K.Knipp, Phys.Rev. 57(1940)571
- 16) R.D.Present und J.K.Knipp, Phys.Rev. 57(1940)1188
- 17) R.D.Present, F.Reines und J.K.Knipp, Phys.Rev. 70(1946)557
- 18) S.Frankel und N.Metropolis, Phys.Rev. 72(1947)914
- 19) S.Cohen und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 22(1963)406
- 20) S.Cohen und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 19(1962)67
- 21) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 101(1956)97
- 22) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 101(1956)651
- 23) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 104(1956)993
- 24) B.L.Cohen, Amer.J.Phys. 38(1970)766
- 25) G.Gamow, Proc.Roy.Soc. A123(1929)386

- 26) G.Gamow, Phys.Z. 30(1929)717
- 27) G.Gamow, Proc.Roy.Soc. A126(1930)632
- 28) S.M.Polikanov, V.A.Druin, V.A.Karnaukov, V.L.Mikheev, A.A.Pleve, N.K.Skobolev, V.G.Subotin, G.M.Ter-Akopian und V.A.Fomichev, Soviet Physics JETP 15(1962)1016
- 29) G.N.Flerov und S.M.Polikanov, Compt.Rend.Congr.Intern. Phys.Nucl.(Paris 1964), Vol.1, S.407
- 30) G.N.Flerov, Y.P.Gangrsky, B.N.Markov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov und G.Jungclaussen, Yad.Fiz. 6(1967)17
- 31) I.Boka, N.Mortologu, M.Sezon, I.Vilkov, N.Vilkov, G.N.Flerov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov und S.P.Tretiakova, Preprint JINR E15-3573, Dubna,1967
- 32) G.N.Flerov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov, S.P.Tretiakova, N.Martalogu, D.Poenaru, M.Sezon, I.Vilkov und N.Vilcov, Nucl.Phys. A97(1967)444
- 33) G.N.Flerov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov, S.P.Tretiakova, I.Boca, M.Sezon, I.Vilcov und N.Vilcov, Nucl.Phys. A102(1967)443
- 34) S.M.Polikanov, Nuclear Structure, Dubna Symposium 1968 (IAEA, Vienna, 1968), S.449
- 35) S.Bjørnholm, J.Borggreen, Y.P.Gangrsky und G.Sletten, Preprint JINR P6-3744, Dubna (1968)
- 36) N.L.Lark, G.Sletten, J.Pedersen und S.Bjørnholm, Nucl. Phys. A139(1969)481
- 37) V.Metag, R.Rebnow, P.von Brentano und J.D.Fox, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1969) S.449
- 38) V.Metag, R.Rebnow, P.von Brentano und J.D.Fox, Z.Physik 226(1969)1
- 39) S.M.Polikanov und G.Sletten, Nucl.Phys. A151(1970)656
- 40) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, University of California, UCRL-11980(1965)

- 41) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Nucl.Phys. 81(1966)1
- 42) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, University of California, UCRL-17070(1966)
- 43) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Proc.Int.Symp."Why and how should we investigate nucleides far off the stability line" Lysekil, Sweden(August 21-27, 1966)
- 44) P.A.Seeger, Nucl.Phys. 25(1961)1
- 45) A.G.W.Cameron und R.M.Elkin, Can.J.Phys. 43(1965)1288
- 46) B.T.Geilikman, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.121
- 47) B.T.Geilikman und G.I.Khlebnikov, Sov.J.Nucl.Phys. 7(1968)155
- 48) H.Kümmel, J.H.E.Mattauch, W.Thiele und A.H.Wapstra, Proc. Conf. on Nuclidic Masses, Vienna, 1963 (Springer, Wien, New York, 1964) S.42
- 49) F.S.Mozer, Phys.Rev. 116(1959)970
- 50) V.M.Strutinsky, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.171
- 51) N.Zeldes, Ark.Fys. 36(1967)361
- 52) R.Vandenbosch, Nucl.Phys. 46(1963)129
- 53) P.Fong, Phys.Rev.Letters 11(1963)375
- 54) P.Armbruster, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna,1965) Vol.1, S.103
- 55) H.W.Schmitt, Ark.Fys. 36(1967)633
- 56) P.A.Seeger und R.Perisho, Los Alamos Report LA-3751(1967)
- 57) P.A.Seeger, Proceedings of the Third International Conference on Atomic Masses, Winnipeg, 1967 (R.C.Barber ed., University of Manitoba Press, Winnipeg,1967) S.85
- 58) P.A.Seeger, Los Alamos Report LA-DC-8950(1968)
- 59) P.A.Seeger, Proc.Int.Conf."On the Properties of Nuclei far from the Region of beta-stability, Leysin 1970, CERN Report No.CERN 70-30(Geneva, 1970) S.217

- 60) P.A.Seeger, Los Alamos Report LA-DC-12792
- 61) V.M.Strutinsky, Yad.Fiz. 3(1966)614; Sov.J.Phys. 3(1966)449
- 62) V.M.Strutinsky, Ark.Fys. 36(1967)629
- 63) V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A95(1967)420
- 64) V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A122(1968)1
- 65) V.M.Strutinsky und S.Bjørnholm, Nuclear Structure, Dubna Symposium 1968 (IAEA, Vienna, 1968) 431
- 66) S.Bjørnholm und V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A136(1969)1
- 67) S.G.Nilsson, C.F.Tsang, A.Sobiczewski, Z.Szymański, S.Wycech, C.Gustafson, I.-L.Lamm, P.Möller und B.Nilsson, Nucl.Phys. A131(1969)1
- 68) A.Green, Nuclear Physics (Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1955) S.250
- 69) L.Wilets, Theories of Nuclear Fission (Clarendon Press, Oxford, 1964) S.43
- 70) W.D.Myers, Phys.Letters 30B(1969)451
- 71) W.D.Myers, University of California, UCRL-18214(1968)
- 72) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 55(1969)395
- 73) A.S.Tyapin, Sov.J.Nucl.Phys. 13(1971)18
- 74) V.R.Pandharipande, Phys.Letters 31B(1970)635
- 75) A.C.Wahl, R.L.Ferguson, D.R.Nethaway, D.E.Troutner und K.Wolfsberg, Phys.Rev. 126(1962)1112
- 76) S.Mukherji, Nucl.Phys. A129(1969)297
- 77) E.Konecny, H.Opower, H.Gunther und H.Göbel, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) S.401
- 78) P.Armbruster, D.Hovestadt, H.Meister und H.J.Specht, Nucl.Phys. 54(1964)586
- 79) K.Sistemich, P.Armbruster, J.Eidens und E.Roeckl, Nucl. Phys. A139(1969)289
- 80) P.Armbruster, Nucl.Phys. A140(1970)385

- 81) E.Konecny, H.Gunther, H.Rösler, G.Siegert und H.Ewald, Z.Physik 231(1970)59
- 82) U.Umezawa, S.Baba und H.Baba, Nucl.Phys. A160(1970)65
- 83) W.J.Swiatecki, Proc.Conf. on Nuclidic Masses, Vienna 1963, ed. by W.H.Johnson, Jr. (Springer-Verlag, Wien, New York, 1964) S.58
- 84) N.V.V.J.Swamy und A.E.S.Green, Phys.Rev. 112(1958)1719
- 85) D.L.Hill und J.A.Wheeler, Phys.Rev. 89(1953)1102
- 86) E.Hilf und G.Süßmann, Phys.Letters 21(1966)654
- 87) S.Knaak, G.Süßmann, E.Hilf und H.Büttner, Phys.Letters 23(1966)711
- 88) V.M.Strutinsky und A.S.Tyapin, Soviet Physics JETP 18 (1964)664
- 89) V.M.Strutinsky, Soviet Physics JETP 18(1964)1298
- 90) R.Schade, Dissertation (Universität Frankfurt a.M., 1968)
- 91) W.D.Myers, University of California, UCRL-18214(1968)
- 92) W.D.Myers, Phys.Letters 30(1969)451
- 93) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 55(1969)395
- 94) H.von Groote und E.Hilf, Nucl.Phys. A129(1969)513
- 95) A.S.Tyapin, Sov.J.Nucl.Phys. 13(1971)18
- 96) H.R.Collard, L.R.B.Elton und R.Hofstadter, in Landolt-Börnstein, Numerical and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Group 1, Vol.2 (Springer-Verlag, Wien, New York, 1967)
- 97) H.C.Lee und R.Y.Cusson, Nucl.Phys. A170(1971)439
- 98) H.A.Bethe und P.J.Siemens, Phys.Letters 27B(1968)549
- 99) K.A.Brueckner, J.R.Buchler, R.C.Clark und R.J.Lombard, Phys.Rev. 181(1969)1543
- 100) R.Hofstadter, Revs.Mod.Phys. 28(1956)214
- 101) R.Hofstadter, Ann.Rev.Nucl.Science 7(1957)231
- 102) L.R.B.Elton, Nuclear Sizes (Oxford University Press, 1961)

- 103) S.G.Nilsson, J.R.Nix, A.Sobiczewski, Z.Szymański,
S.Wycech, C.Gustafson und P.Möller, Nucl.Phys. A115(1968)
545
- 104) V.V.Pashkevich und V.M.Strutinsky, Sov.J.Nucl.Phys.
9(1969)35
- 105) Yu.A.Muzychka, Phys.Letters 28B(1969)539
- 106) V.V.Pashkevich, Nucl.Phys. A133(1969)400
- 107) J.Damgaard, H.C.Pauli, V.V.Pashkevich und V.M.Strutinsky,
Nucl.Phys. A135(1969)432
- 108) S.G.Nilsson, S.G.Thompson und C.F.Tsang, Phys.Letters
28B(1969)458
- 109) P.Möller, S.G.Nilsson, A.Sobiczewski, Z.Szymański und
S.Wycech, Phys.Letters 30B(1969)223
- 110) S.G.Nilsson, G.Ohlén, C.Gustafsson und P.Möller, Phys.
Letters 30B(1969)437
- 111) H.J.Krappe und U.Wille, Physics and Chemistry of Fission,
(IAEA, Vienna, 1969) S.197
- 112) P.Möller und B.Nilsson, Phys.Letters 31B(1970)171
- 113) P.Möller und S.G.Nilsson, Phys.Letters 31B(1970)283
- 114) P.Möller, Nucl.Phys. A142(1970)1
- 115) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Nucl.Phys. A140(1970)275
- 116) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Nucl.Phys. A140(1970)289
- 117) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Proc.Int.Conf."On the Proper-
ties of Nuclei far from the Region of beta-stability,
Leysin 1970, CERN Report No.CERN 70-30 (Geneva, 1970) S.769
- 118) K.Albrecht, D.Scharnweber, W.Greiner und U.Mosel, Phys.
Letters 32B(1970)229
- 119) U.Mosel und D.Scharnweber, Phys.Rev.Letters 25(1970)678
- 120) Yu.A.Muzychka, V.V.Pashkevich und V.M.Strutinski, Sov.
J.Nucl.Phys. 8(1969)417
- 121) J.R.Nix, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-DC-
11825(1970)

- 122) C.Gustafsson, P.Möller und S.G.Nilsson, Phys.Letters 34B(1971)349
- 123) V.Metag, R.Rebnow, P.von Brentano, F.Dickmann und K.Dietrich, Phys.Letters 34B(1971)257
- 124) G.D.Adeev, P.A.Cherdantsev und I.A.Gamalya, Phys.Letters 35B(1971)125
- 125) D.Scharnweber, W.Greiner und U.Mosel, Nucl.Phys. A164 (1971)257
- 126) U.Mosel und H.W.Schmitt, Nucl.Phys. A165(1971)73
- 127) C.F.Tsang, University of California, UCRL-18899(1969)
- 128) M.Bolsterli, E.O.Fiset, J.R.Nix und J.L.Norton, Phys.Rev. Letters 27(1971)681
- 129) M.Bolsterli, E.O.Fiset, J.R.Nix und J.L.Norton, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-DC-12817(1971)
- 130) S.E.Larsson, I.Ragnarsson und S.G.Nilsson, Preprint Lund Institute of Technology, 1972
- 131) H.C.Pauli, T.Ledergerber und M.Brack, Phys.Letters 34B (1971)264
- 132) H.C.Pauli und T.Ledergerber, Nucl.Phys. A175(1971)545
- 133) K.Dietrich, Z.Physik 214(1968)503
- 134) T.D.Newton, Can.J.Phys. 38(1960)701
- 135) D.A.Arseniev, L.A.Malov, V.V.Pashkevich, A.Sobiczewski und V.G.Soloviev, Sov.J.Nucl.Phys. 8(1969)514
- 136) R.W.Hasse, Phys.Rev. C4(1971)572
- 137) P.Holzer, U.Mosel und W.Greiner, Nucl.Phys. A138(1969)241
- 138) F.Dickmann und K.Dietrich, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1969) Paper SM-122/45
- 139) V.V.Pashkevich, Nucl.Phys. A169(1971)275
- 140) V.Metag, R.Rebnow und P.von Brentano, Nucl.Phys. A165 (1971)289
- 141) A.J.Elwyn und A.T.G.Ferguson, Physics and Chemistry of Fission, (IAEA, Vienna, 1969) S.457

- 142) A.J.Elwyn und A.T.G.Ferguson, Nucl.Phys. A148(1970)337
- 143) R.Vandenbosch und K.L.Wolf, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1969) S.439
- 144) S.Bjornholm, J.Borggreen, L.Westgaard und V.A.Karnaukov, Nucl.Phys. A95(1967)513
- 145) J.C.D.Milton und J.S.Fraser, Can.J.Phys. 40(1962)1626
- 146) A.C.Wahl, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.317
- 147) M.Ashgar, C.Carles, R.Chastel, T.D.Dean, M.Ribrag und C.Signarbieux, Nucl.Phys. A145(1970)657
- 148) V.A.Rubchenya, Sov.J.Nucl.Phys. 9(1969)
- 149) V.F.Apalin, Yu.N.Gritsyuk, I.E.Kutikov, V.I.Lebedev und L.A.Mikaelyan, Nucl.Phys. 55(1964)249
- 150) H.Maier-Leibnitz, P.Armbruster und H.J.Specht, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.2, S.113
- 151) H.W.Schmitt, J.H.Neiler und F.J.Walter, Phys.Rev. 141 (1966)1146
- 152) F.Dickmann und K.Dietrich, Nucl.Phys. A129(1969)241
- 153) J.R.Nix und W.J.Swiatecki, Nucl.Phys. 71(1965)1
- 154) J.R.Nix, University of California, UCRL-11338(1964)
- 155) A.Bohr, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 26(1952) No.14
- 156) U.L.Businaro und S.Gallone, Nuovo Cimento 1(1955)629
- 157) U.L.Businaro und S.Gallone, Nuovo Cimento 1(1955)1277
- 158) U.L.Businaro, und S.Gallone, Nuovo Cimento 5(1957)315
- 159) J.Trepulka, Diplomarbeit, Universität Würzburg, 1969
- 160) G.D.Adeev, I.A.Gamalya und P.A.Cherdantsev, Sov.J.Nucl. Phys. 13(1971)679
- 161) J.N.P.Lawrence, Phys.Rev. 139(1965)B1227
- 162) R.W.Hasse, R.Ebert und G.Süßmann, Nucl.Phys. A106(1967)117
- 163) S.A.E.Johansson, Nucl.Phys. 22(1961)529

- 164) J.Schirmer, Diplomarbeit, Universität München, 1970
- 165) H.Schultheis und R.Schultheis, Lett.Nuovo Cimento 3(1972) 313
- 166) H.Schultheis, R.Schultheis und G.Süßmann, Nucl.Phys. A144(1970)545
- 167) P.H.Stelson und L.Grodzins, Nucl.Data 1 No.1(1965)21
- 168) D.Laugwitz, Differentialgeometrie (Teubner, Stuttgart, 1960)
- 169) H.W.Guggenheimer, Differentialgeometry (McGraw Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1963)
- 170) H.Reuter, Diplomarbeit, Universität Frankfurt a.M., 1968
- 171) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 34B(1971)245
- 172) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 35B(1971)296
- 173) U.Götz und H.C.Pauli, private Mitteilung (1972)
- 174) H.Meldner, Ark.Fys. 36(1967)593
- 175) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 37B(1971)467
- 176) R.Schultheis, Diplomarbeit, Universität Frankfurt a.M. 1968
- 177) S.Björnholm und E.Lynn, erscheint in Rev.Mod.Phys.
- 178) Z.Szymański, Nucl.Phys. 28(1961)63
- 179) A.H.Wapstra, Handbuch der Physik (Hrsg. S.Flügge, Springer, Berlin, 1958) Bd 38/1, S.1
- 180) W.Stepień und Z.Szymański, Phys.Letters 26B(1968)181
- 181) J.J.Griffin, Comm.Nucl.Part.Phys. 3(1969)58
- 182) P.Henrici, Elements of Numerical Analysis (Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1965) S.259
- 183) B.B.Back, J.P.Bondorf, G.A.Ostroschenko, J.Pedersen und B.Rasmussen, Preprint (1971)
- 184) B.L.Andersen, F.Dickmann und K.Dietrich, Nucl.Phys. A159 (1970)337
- 185) H.J.Specht, International Winter Meeting on Nuclear Physics Villars, 1972
- 186) R.W.Hasse, Phys. Letters 27B(1968)605

- 187) R.W.Hasse, Nucl.Phys. A128(1969)609
- 188) I.Kelson, Phys.Rev. 136(1964)B1667
- 189) J.R.Nix, Ann.Phys.(N.Y.) 41(1967)52
- 190) G.A.Pik-Pichak, Soviet Physics JETP 7(1958)238
- 191) R.Berlinger und W.J.Knox, Phys.Rev. 121(1961)1195
- 192) W.D.Foland und R.D.Present, Phys.Rev. 113(1959)613
- 193) A.Bohr und B.R.Mottelson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk.
27(1953) No.16
- 194) J.Rainwater, Phys.Rev. 79(1950)257

Herrn Professor Dr. G. Süßmann möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Diskussionen während ihrer Ausführung danken. Herr Dr. R. W. Hasse hat mir freundlicherweise ein Magnetband mit Daten zur Verfügung gestellt, nach denen ein Teil der B_c -Werte für Abb. 28 interpoliert ist. Ein großer Teil der numerischen Rechnungen ist auf der PDP-10-Rechenanlage des Beschleuniger-Labors der Universität und der Technischen Universität München durchgeführt worden, was nur durch das Entgegenkommen vieler Benutzer möglich war. Ihnen und allen, die mich bei der vorliegenden Arbeit unterstützt haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Lebenslauf

14. 5. 1943 geboren in Frankfurt a.M. als Sohn des Verwaltungsdirektors Theodor Schultheis und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Wilhelm
- 1949 - 1953 Grundschule in Frankfurt-Niederrad
- 1953 - 1962 Goethe-Gymnasium in Frankfurt a.M. (Realgymnasium) - in der Oberstufe (ab 1959) im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig
26. 2. 1962 Abitur
- SS 1962 - Physik-Studium an der Universität Frankfurt
SS 1968
14. 11. 1964 Diplom-Vorprüfung
- WS 1966/67 - Diplom-Arbeit in theoretischer Kernphysik bei Professor Dr. G. Süßmann
11. 7. 1968 Diplom-Prüfung in Physik
- WS 1968/69 - an der Universität München eingeschrieben
SS 1969
- WS 1968/69 Beginn der Doktor-Arbeit
1. 3. 1969 - wissenschaftlicher Angestellter der Sektion Physik der Universität München

